THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

SOUS PRESSE :

La SECONDE PARTIE, contenant la Théorie des fonctions uniformes, les principes du Calcul des Résidus, et les applications au calcul des intégrales définies et au développement des fonctions en séries et en produits.

Bordeaux, imp. G. Gounouilhou,
rue Guiraude, 11.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PAR J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences
de Bordeaux.

PREMIÈRE PARTIE.

ALGÈBRE DES QUANTITÉS COMPLEXES.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1867

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PREMIÈRE PARTIE.

Algèbre des quantités complexes.

CHAPITRE Ier

INTRODUCTION

§ Ier

Considérations générales.

1. Une des plus grandes difficultés qu'éprouvent les commençants, en abordant l'étude de l'algèbre, c'est l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires. Les géomètres qui ont assis sur des bases inébranlables les règles du calcul de ces symboles ont rendu un immense service à la philosophie mathématique. On peut cependant ne pas se trouver encore pleinement satisfait de leurs démonstrations, qui sont d'une rigueur inattaquable, sans doute, mais qui laissent subsister dans les mathématiques des symboles de quantités et des signes d'opérations qui semblent ne correspondre à rien de réel. Les raisonnements généralement employés reviennent à établir qu'il y a compensation entre deux absurdités, savoir : entre la considération de quantités dont l'existence implique contradiction, et entre l'application à ces quantités d'opérations qui n'ont de sens que pour les quantités réelles.

2. On aura donc obtenu un avantage important, si l'on parvient à démontrer les mêmes règles avec la même rigueur, sans intro-

duire dans les raisonnements autre chose que des quantités réelles et mesurables, sur lesquelles on exécutera des opérations nettement définies, mais plus générales que les opérations simples de l'arithmétique. De cette manière, au lieu d'arriver au résultat par une route certaine, mais obscure, dans laquelle un esprit timide peut craindre à chaque instant de s'égarer, on passera par une suite de déductions claires, et l'on pourra suivre des yeux toutes les phases du calcul.

3. On atteint ce but, en introduisant dans l'algèbre de nouveaux signes d'opérations fondés sur des considérations géométriques, qui offrent un champ plus étendu et des ressources plus variées que les considérations arithmétiques que l'on prend généralement pour point de départ.

Toute valeur numérique peut être représentée par le rapport de deux grandeurs géométriques, lignes, angles, aires, volumes, etc., ou simplement par une seule grandeur, si l'unité de son espèce est donnée.

Une figure de géométrie peut être considérée comme la représentation d'autant de nombres qu'elle renferme de grandeurs mesurables. Ainsi, un triangle représente trois nombres par ses trois côtés, trois nombres par ses trois angles, un nombre par son aire, etc.

Toute construction géométrique correspond à diverses combinaisons d'opérations arithmétiques entre les nombres représentés par les divers éléments de la construction. Ainsi, une force étant déterminée, dans un plan donné, par deux éléments, une longueur et un angle, la composition de deux forces, qui revient à la construction d'un parallélogramme ou d'un triangle, correspondra à toutes les opérations arithmétiques nécessaires pour déterminer les éléments de ce parallélogramme ou de ce triangle au moyen des deux longueurs et des deux angles donnés. Cet ensemble d'opérations sera désigné, d'une manière aussi claire qu'abrégée, en l'appelant *construction d'un parallélogramme*.

4. L'algèbre s'occupe uniquement de la combinaison des opérations, sans s'inquiéter de leur signification ni de leur nature. Elle donne les moyens de remplacer une combinaison d'opérations par

une autre combinaison équivalente; mais elle ne traite nullement de la manière d'effectuer ces opérations. Elle part d'un petit nombre de principes tirés des propriétés communes que présente chaque opération dans les divers cas particuliers pour lesquels elle a été définie. Tels sont les principes suivants :

Une somme ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties (principe de l'*addition*).

La *soustraction* est l'opération inverse de l'addition.

Un produit ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses facteurs (principe de la *multiplication*).

Etc.

C'est en partant de ces principes que l'on établit les règles pour la transformation des opérations les unes dans les autres.

Rien n'empêche donc de donner des opérations fondamentales relatives à telle ou telle espèce de quantités telles définitions que l'on voudra, pourvu que ces définitions s'accordent avec les principes en question. Les règles du calcul algébrique s'appliqueront toujours aux opérations ainsi définies tant que ces conditions seront remplies.

Par exemple, rien n'empêchera d'appeler *addition* la composition de deux forces, et de dire que la résultante est égale à la *somme* des composantes; car la somme, ainsi définie, jouit de la propriété de ne pas changer lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties.

Naturellement les définitions des opérations ne doivent pas être choisies au hasard. On commence par prendre les définitions les plus simples; puis on les modifie en les généralisant, à mesure que les définitions primitives deviennent insuffisantes. Mais on a soin que chaque nouvelle généralisation renferme toujours les cas particuliers précédents.

5. Tant que l'on s'en tient aux définitions primitives, les règles de calcul ne peuvent embrasser à la fois tous les cas différents d'une même question; et si les calculs ont été établis spécialement pour un de ces cas, ils conduiront, pour les autres cas, à des impossibilités. On cherchera alors à généraliser à la fois l'idée de quantité et les définitions des opérations, de manière que l'impossibilité soit écartée, et qu'une même formule puisse embrasser la solution de tous les cas.

Remarquons, en passant, que l'impossibilité d'un problème n'est pas toujours accusée par la nature même des symboles que le calcul donne pour solution. Elle peut provenir de ce que le résultat ne remplit pas certaines conditions que l'on n'a pas pu exprimer par les équations du problème. Le problème est impossible, par exemple, lorsque sa nature exige que la solution soit un nombre entier, et que le calcul donne un résultat fractionnaire. Tel serait le cas où l'on demanderait combien il faudrait donner de dents à une roue engrenant avec une autre roue armée de 50 dents, pour qu'elle fit 3 fois plus de tours que celle-ci dans le même temps.

Il faut distinguer, en outre, entre l'impossibilité absolue d'un problème, et l'impossibilité de tel ou tel cas de ce problème, lorsqu'il en peut présenter plusieurs. C'est dans ce dernier cas seulement que l'on peut faire disparaître l'impossibilité par la généralisation des opérations.

6. Cette généralisation s'obtient en remplaçant les définitions arithmétiques des quantités et des opérations par des définitions géométriques. C'est ce que l'on a fait, depuis Descartes, pour les quantités négatives. Mais c'est plus tard seulement que l'on a cherché à représenter géométriquement les quantités imaginaires par des grandeurs réelles. Leur théorie purement algébrique n'a guère été fixée que depuis un siècle, après les travaux de d'Alembert et d'Euler, et c'est plus récemment encore que Cauchy y a mis la dernière main.

§ II.

Sur l'histoire de la théorie géométrique des imaginaires.

7. Le premier essai de représentation géométrique des quantités imaginaires est dû au géomètre prussien Heinrich Kühn, né à Kœnigsberg en 1690, mort à Danzig en 1769.

Kühn a publié, en 1750, dans le tome III des *Novi Commentarii* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, dont il était membre, un Mémoire de 54 pages in-4°, intitulé : *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis.*

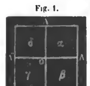
Ce travail, que Montuela traite peut-être avec trop de dédain,

ne contient pas, il est vrai, la solution de la difficulté, que l'auteur avait aperçue; mais il a, du moins, le mérite d'avoir mis sur la voie, et il restait bien peu de chose à ajouter pour obtenir la représentation des imaginaires telle qu'on la conçoit aujourd'hui.

8. Voici sur quelles bases reposent les considérations longuement développées par Kühn.

Étant donnés deux axes rectangulaires, portons, à partir de leur intersection mutuelle, et de part et d'autre de cette intersection, sur l'un d'eux, des longueurs égales à a, et sur l'autre, des longueurs égales à b. En donnant des signes à ces longueurs, d'après la convention établie par Descartes, les segments pris sur le premier axe seront $+a$ et $-a$; les segments pris sur le second axe seront $+b$ et $-b$. Construisons les quatre rectangles qui ont ces segments pour côtés, et donnons aux aires de ces rectangles les signes qui résultent de la multiplication de leurs dimensions en grandeur et en signe. Les aires de ces quatre rectangles seront alors

Fig. 1.



$$\begin{aligned}\alpha &= (+a)\times(+b) = +ab,\\ \beta &= (+a)\times(-b) = -ba,\\ \gamma &= (-a)\times(-b) = +ba,\\ \delta &= (-a)\times(+b) = -ab.\end{aligned}$$

Supposons maintenant $b = a$, et désignons par le signe $\sqrt{}$ le côté de chacun des carrés résultants. On aura, d'après Kühn,

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha} &= \sqrt{(+a)\times(+a)} = +a,\\ \sqrt{\beta} &= \sqrt{(+a)\times(-a)} = +\sqrt{-a^2},\\ \sqrt{\gamma} &= \sqrt{(-a)\times(-a)} = -a,\\ \sqrt{\delta} &= \sqrt{(-a)\times(+a)} = -\sqrt{-a^2}.\end{aligned}$$

Remarquons qu'il serait plus naturel, selon nos idées actuelles, de poser, comme nous le verrons plus tard,

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta} &= -\sqrt{-a^2},\\ \sqrt{\delta} &= +\sqrt{-a^2}.\end{aligned}$$

9. L'imaginaire $\pm\sqrt{-a^2}$, qui exprime l'une ou l'autre des racines de l'équation

$$x^2 + a^2 = 0,$$

est définie par Kühn comme le *côté de l'un des carrés négatifs* β ou δ. Mais l'auteur n'indique pas lequel des côtés du carré il faut prendre pour représenter l'imaginaire, et faute d'avoir fait entrer dans cette représentation la notion de direction, il lui devient impossible de définir ce qu'il faut entendre par la *somme* d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire, telle qu'on la rencontre dans la solution de l'équation complète du second degré

$$(x-g)^2 + h^2 = 0.$$

Il dit bien que cette équation est vérifiée en prenant pour $x-g$ le côté d'un carré négatif; mais il n'indique nullement quel sens il faut attacher à la racine elle-même

$$x = g \pm \sqrt{-h^2}.$$

C'est donc à tort, selon nous, que l'on fait souvent remonter à Kühn l'idée de la représentation des imaginaires au moyen d'une direction perpendiculaire à celle qui correspond aux quantités réelles. On voit, au contraire, qu'il considère les longueurs comptées sur l'axe vertical comme des quantités réelles, positives ou négatives, aussi bien que les quantités comptées sur l'axe horizontal. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il a posé le problème sans le résoudre, et que la lecture de son Mémoire aurait pu mettre ses successeurs sur la voie de la solution.

10. Pendant le demi-siècle qui suivit la publication du travail de Kühn, la question fut à peu près abandonnée. Nous lisons seulement, dans une Note de Cauchy ([1]), la mention suivante, à propos des travaux dont nous parlerons tout à l'heure :

« Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à » ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent, et dès » l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, » qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a

([1]) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 157.

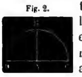
» communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, cons-
» tructeur de vaisseaux au Havre. »

11. Le premier Mémoire publié sur ce sujet, depuis la tentative de Kühn, est celui de l'abbé Buée, inséré dans les *Philosophical Transactions* pour l'année 1806, et intitulé : *Mémoire sur les quantités imaginaires* (56 pages) [1].

Dans ce travail, Buée formule nettement, pour la première fois, la représentation des lignes imaginaires par des longueurs perpendiculaires à la direction des lignes réelles.

Il parvient à ce résultat par deux raisonnements différents.

Fig. 2.



Le premier repose sur la construction d'une moyenne proportionnelle. La perpendiculaire AB, élevée sur le milieu du diamètre d'un demi-cercle de rayon $= 1$, est une moyenne proportionnelle entre les deux moitiés, $AC = +1$, $AD = -1$, du diamètre. Elle a donc pour valeur

$$\sqrt{(+1) \times (-1)} = \sqrt{-1}.$$

Fig. 1.



L'autre raisonnement n'est autre chose que celui de Kühn, complété. Buée considère, comme Kühn, les quatre carrés $\alpha, \delta, \gamma, \beta$, de côté $= 1$, formés autour d'un point O, et dont les surfaces sont ± 1. Le carré α, dans les quatre positions qu'il occupe successivement, en tournant chaque fois d'un quart de révolution autour du point O, prend respectivement les quatre valeurs

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1.$$

On peut considérer ces quatre valeurs comme les carrés des quantités

$$+1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1},$$

qui seraient représentées par le côté OA dans ses quatre positions

$$OA, \quad OA', \quad OA'', \quad OA'''.$$

---

[1] Cette analyse est empruntée à l'ouvrage du professeur Matzka : *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra u. s. w.* Prague, 1850.

Si juste cependant que soit la solution donnée par Buée, on ne peut nier qu'elle ne repose sur des arguments plus métaphysiques que mathématiques, et sur une extension mal justifiée des règles du calcul algébrique. Aussi son travail n'a-t-il pas attiré l'attention qu'il aurait méritée, malgré quelques erreurs qui le déparent.

12. Dans la même année 1806, Robert Argand, de Genève, fit imprimer à Paris un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Cet ouvrage, sans nom d'auteur, n'a pas été mis dans le commerce. Nous le connaissons par un extrait qu'en a donné l'auteur dans les *Annales de* Gergonne (t. IV, 1813), et par une note de Cauchy [1].

Argand établit d'abord, en suivant la première méthode de Buée, la représentation de $\sqrt{-1}$ par une longueur portée dans une direction perpendiculaire à celle des lignes réelles.

Il généralise ensuite cette conception, en introduisant la représentation, par un symbole unique, d'une ligne considérée à la fois en grandeur et en direction.

Il définit, comme nous le ferons plus tard, les opérations de multiplication et d'addition effectuées sur les lignes *dirigées;* il en tire la décomposition de ces lignes suivant deux axes rectangulaires, laquelle correspond, en analyse, à la séparation du réel et de l'imaginaire.

Il établit ainsi la formule

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q},$$

qui n'est autre chose que le théorème de Moivre, et il en déduit toutes les formules de la trigonométrie.

Argand termine son Mémoire en exposant géométriquement la démonstration donnée par Legendre de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques : *Toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, a au moins une racine représentée par une ligne* dirigée, *c'est-à-dire une racine réductible à la forme* $a + b\sqrt{-1}$.

Dans une Note publiée plus tard dans le même volume des

[1] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 179.

Annales, Argand reprend sa démonstration avec plus de détails, et la rend tout à fait rigoureuse. Nous la reproduirons plus loin.

13. Les communications d'Argand avaient eu lieu à l'occasion d'un article publié dans le même recueil scientifique par J.-F. Français, professeur à l'École d'Artillerie de Metz. Celui-ci, d'après quelques indications qui lui étaient parvenues sur les idées d'Argand, sans qu'il en connût l'auteur, avait réussi à en retrouver les principaux résultats, et en avait fait l'objet d'une Note [1], à la suite de laquelle Argand réclama la priorité.

On remarque, dans la Note de Français, le premier emploi de la notation

$$r_p,$$

pour désigner une ligne de longueur r, et faisant avec un axe fixe l'angle p, notation très simple, que Cauchy a fini par adopter.

14. Parmi les auteurs qui, depuis Argand jusqu'à Cauchy, ont traité le même sujet, nous citerons seulement Mourey et Warren, dont les travaux ont paru dans la même année 1828.

Mourey, dans une brochure qui a pour titre : *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédié aux amis de l'évidence*, et qui a été réimprimée en 1861, développe complètement les règles du calcul des lignes *dirigées*, et donne une nouvelle démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations. Malheureusement la lecture de ce travail remarquable est rendue difficile et rebutante par une profusion de termes nouveaux et de notations bizarres, le plus souvent inutiles.

Mourey se proposait de publier un Traité beaucoup plus étendu, dont sa brochure n'était qu'un extrait, et où il devait être question, entre autres choses, de la représentation symbolique des lignes dans l'espace, au sujet de laquelle Argand et Français n'avaient rien trouvé de satisfaisant. Nous ignorons ce qu'a pu devenir ce manuscrit, dont la perte serait regrettable.

15. John Warren, *fellow* à l'Université de Cambridge, puis pasteur à Huntingdon, a fait imprimer une brochure intitulée :

---

[1] *Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires.* (*Ann. de Math.*, t. IV, p. 61-71.)

A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge, 1828 (154 pages grand in-8°). Cette brochure a été suivie de deux articles moins étendus, insérés dans le *Philosophical Transactions* pour l'année 1829 [1].

Le travail de Warren est plus complet et plus étendu que l'opuscule de Mourey. La discussion des racines de l'unité y est faite avec soin. L'auteur termine par une démonstration des principales formules de la trigonométrie, et par diverses applications au calcul intégral et à la mécanique. On peut lui reprocher seulement, quoique à un moindre degré peut-être qu'à Mourey, l'introduction de notations compliquées et incommodes.

16. Les deux ouvrages que nous venons de citer renferment complètement la théorie élémentaire de la représentation géométrique des imaginaires, ou, si l'on veut, de la représentation par un symbole imaginaire d'une droite quelconque tracée dans un plan.

Cette théorie a été reprise et coordonnée par Cauchy, dans le tome IV de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (pages 157-355), et l'on peut dire maintenant qu'elle a reçu sa forme définitive.

17. Il n'entre pas dans notre plan de traiter des applications à la géométrie pure et à la mécanique qu'a reçues la théorie dont nous nous occupons. Nous nous contenterons de mentionner les travaux de Scheffler [2] sur l'usage des imaginaires en géométrie analytique, et le Mémoire de Siebeck [3] sur les transformations géométriques déduites de la théorie des imaginaires.

Nous ne pouvons non plus nous occuper du travail considérable publié par M. Maximilien Marie sur les fonctions de variables imaginaires [4], ce travail étant fondé sur un système de représentations des imaginaires essentiellement différent de celui qu'ont adopté Cauchy et Riemann.

---

[1] Matzka : *Versuch einer richtiger Lehre u. s. w.*

[2] *Der Situationskalkul* Brunswick, 1851, 1 vol. in-8°.

[3] *Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen.* (*Journal de Crelle*, t. LV, p. 221-253, 1858.)

[4] *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* (*Journal de Liouville*, 1858-1862.)

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS ARITHMÉTIQUES ET ALGÉBRIQUES, OU QUANTITÉS RÉELLES.

§ Ier.

18. Dans toute question où les données sont exprimables en nombres, la solution se ramène, en définitive, à des opérations d'arithmétique.

La détermination de ces opérations et leur transformation en d'autres opérations équivalentes constituent le but de l'algèbre, ou plutôt un cas particulier du problème plus général qu'embrasse cette science.

L'algèbre, en effet, s'occupe uniquement de la combinaison d'opérations dont les opérations d'arithmétique forment un cas très restreint, et auxquelles on a donné les mêmes noms qu'aux opérations d'arithmétique, parce qu'elles jouissent des propriétés sur lesquelles les combinaisons des opérations d'arithmétique sont fondées.

Par exemple, le résultat d'une addition arithmétique ne change pas lorsqu'on intervertit d'une manière quelconque l'ordre des parties. C'est sur cette propriété que sont fondées les transformations que l'on peut faire subir aux combinaisons d'additions entre elles, ou aux combinaisons de l'addition avec son opération inverse, la soustraction. De là les différentes manières de calculer la valeur d'un polynôme, etc.

Si nous donnons maintenant le nom d'*addition* à une opération quelconque jouissant de la même propriété fondamentale, et le nom de *soustraction* à l'opération inverse, il est clair que tous les résultats obtenus relativement aux transformations de l'addition et de la soustraction en arithmétique subsisteront encore quand il s'agira des mêmes opérations généralisées.

De même, toutes les propriétés de la multiplication, de l'élévation aux puissances et des opérations inverses, la division et l'extraction des racines, découlent du principe général que, dans un produit, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.

Si nous appelons *multiplication* une opération quelconque jouissant de la même propriété relativement à l'interversion des facteurs, et si nous en déduisons, comme en arithmétique, les définitions généralisées de l'élévation aux puissances, de la division et de l'extraction des racines, toutes les règles de l'arithmétique déduites du principe fondamental subsisteront pour les opérations généralisées, quelle que soit la nature de ces opérations, et quels que soient les moyens à employer pour les effectuer.

19. Il ne faut donc pas se représenter l'algèbre comme opérant uniquement sur des quantités numériques, et ne pouvant traiter les grandeurs concrètes sans passer par l'intermédiaire des nombres. Une formule algébrique peut indiquer immédiatement une construction géométrique ou un mouvement mécanique, sans qu'il soit nécessaire en aucune façon de songer à l'évaluation numérique des données du problème.

Ainsi, si l'on définit la multiplication géométrique comme la construction d'un rectangle, l'équation

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

exprime l'équivalence entre une certaine aire et la somme de plusieurs autres, abstraction faite de toute évaluation numérique de ces aires.

20. Après ces remarques sur l'indépendance qui existe entre les règles données par l'algèbre pour la transformation des opérations et la nature même de ces opérations, occupons-nous des divers systèmes de signes que l'algèbre peut employer dans ses formules pour indiquer ces transformations.

On connaît l'emploi des signes de l'arithmétique $+$, $-$, $\times$, ..., pour représenter les transformations algébriques de même nom que les opérations arithmétiques correspondantes.

Mais il est souvent plus avantageux de prendre pour images de ces transformations, non plus des opérations arithmétiques, mais des constructions géométriques, dont la variété beaucoup plus grande permet d'indiquer plus brièvement des combinaisons compliquées, et d'embrasser sous un même énoncé des cas plus généraux, en même temps que ces constructions aident l'intelligence en parlant aux yeux.

Maintenant, lorsqu'on a reconnu qu'une construction géométrique jouit des mêmes propriétés fondamentales qu'une certaine opération d'arithmétique, rien n'empêchera de lui donner le nom de cette opération, et de la soumettre comme elle aux transformations de l'algèbre.

21. Pour en donner un exemple, considérons la règle du parallélogramme des forces. En représentant chaque force par une ligne parallèle à sa direction et de longueur proportionnelle à son intensité, la détermination de la grandeur et de la direction de la résultante de deux forces dépendra des opérations indiquées par la trigonométrie pour la résolution d'un triangle dont on connaît deux côtés avec l'angle qu'ils comprennent. On voit, de plus, aisément que la résultante de deux ou de plusieurs forces ne dépend en aucune manière de l'ordre dans lequel on compose ces forces. Donc l'opération de la composition des forces jouit de la propriété fondamentale de l'addition, de ne pas dépendre, quant au résultat, de l'ordre dans lequel on range les quantités à composer. Rien donc n'empêche de nommer *addition* de deux ou de plusieurs forces, *en grandeur et en direction*, la combinaison d'opérations d'arithmétique ou de construetions géométriques qui sert à la détermination de la résultante au moyen de ses composantes. Dès lors, tous les calculs algébriques relatifs à l'addition et à son opération inverse, la soustraction, s'appliqueront, sans aucun changement, à la composition des forces, et les seuls signes + ou — suffiront pour indiquer tout l'ensemble des opérations d'arithmétique qu'exige la résolution d'un triangle.

Nous allons voir maintenant comment se sont faites les extensions successives des définitions des quantités et des opérations.

§ II.

Des quantités et des opérations arithmétiques.

22. On peut représenter tous les nombres, et plus généralement tous les rapports, commensurables ou non, des grandeurs à leurs unités respectives, par des longueurs portées sur une droite OX, à partir d'un point fixe O, pris pour *origine*, et dans une direction constante de O vers X. Celle des extrémités d'une longueur qui est

la plus voisine du point O, est dite le *commencement* ou l'extrémité *initiale;* l'autre est dite la *fin* ou l'extrémité *finale*.

En adoptant ce mode de représentation, les diverses opérations relatives soit aux nombres, soit aux quantités concrètes, se ramèneront à des constructions géométriques que l'on pourra généralement effectuer, ou du moins dont on concevra toujours la possibilité.

Nous admettrons qu'une grandeur puisse toujours être transportée, sans changer de valeur, soit le long de l'axe OX, soit sur une parallèle à cet axe.

23. Cela posé, pour faire l'*addition* de deux longueurs, on les portera sur la même direction, en faisant coïncider le *commencement* de l'une avec la *fin* de l'autre. La *somme* sera la distance des deux extrémités non communes.

Pour faire la *soustraction*, on portera encore les longueurs sur la même direction, mais en faisant coïncider leurs extrémités *finales*. La *différence* sera la distance des extrémités initiales.

On pourrait encore opérer la soustraction en faisant coïncider les extrémités *initiales*. La différence serait la distance des extrémités finales.

24. La *multiplication* s'effectuera par la construction d'une quatrième proportionnelle, le produit $x = a.b$ de a par b étant le quatrième terme de la proportion

Fig. 3.

$$1 : a = b : x.$$

Sur OX, prenons $O1 = 1, Oa = a$; sur $O'X'$, parallèle à OX, prenons $O'b = b$; menons la ligne $1b$, qui rencontre, en un point P, la ligne OY, perpendiculaire à OX, et tirons Pa, qui coupera $O'X'$ en x. La ligne $Ox = x$ sera la quatrième proportionnelle cherchée, et représentera le produit demandé $a.b$.

La *division* se ramène immédiatement à la multiplication, et s'effectue aussi par la construction d'une quatrième proportionnelle. Ainsi le quotient $x = \frac{a}{b}$ sera déterminé par la proportion

$$b : a = 1 : x,$$

et se construira comme le produit de tout à l'heure.

L'élévation aux puissances entières s'opère au moyen de plusieurs multiplications successives.

25. *L'extraction de la racine carrée* revient à la construction d'une moyenne proportionnelle entre la quantité donnée et l'unité.

Les extractions de racines dont les indices sont des puissances de 2 s'opèrent par la répétition de la même construction.

Quant aux racines dont les indices ne sont pas des puissances de 2, on peut les extraire théoriquement à l'aide de l'instrument imaginé par Descartes (*), ou pratiquement par des méthodes d'approximation indéfinie.

Il en serait de même pour la résolution des équations algébriques et pour les opérations transcendantes, correspondantes aux fonctions exponentielles, logarithmiques, circulaires, etc., ainsi que pour la résolution des équations transcendantes.

§ III.

Des quantités et des opérations algébriques.

26. Un problème étant posé, l'algèbre nous enseigne à transformer les conditions données en d'autres qui permettent la résolution, exacte ou approchée, du problème à l'aide des opérations de l'arithmétique ou des constructions géométriques. Il peut se faire, dans certains cas, que l'on soit ainsi conduit à des opérations inexécutables, telle que celle de soustraire un plus grand nombre d'un plus petit.

L'impossibilité du problème, accusée par une opération impossible, peut être tantôt *absolue*, tantôt *apparente*. Elle sera absolue lorsque les conditions exprimées par l'équation du problème correspondront complètement à celles de l'énoncé, celui-ci ne pouvant donner lieu qu'à l'équation reconnue impossible.

D'autres fois, l'impossibilité est seulement *apparente*. C'est lorsque le problème pouvant offrir plusieurs cas entre lesquels on ne sait pas choisir *a priori*, on a mis un seul de ces cas en équation, et que le cas que l'on a pris n'est pas celui qui a lieu réellement.

(*) *Géométrie*, livre II.

27. On peut se demander maintenant s'il n'est pas possible de donner à l'idée de quantité et aux définitions des opérations une extension analogue à celle que l'on a déjà admise en arithmétique, pour passer du calcul des nombres entiers au calcul des fractions, cette extension devant permettre d'embrasser dans une même formule les divers cas d'une même question, et faire ainsi disparaître l'impossibilité, lorsqu'elle n'est qu'apparente.

Choisissons un exemple particulier, le plus simple possible. Une personne reçoit une somme a et perd une somme b : on demande quel changement a subi l'état de sa fortune.

Il y a d'abord deux cas à distinguer, le changement pouvant avoir eu pour résultat soit un gain, soit une perte. Figurons géométriquement les opérations nécessaires à la solution du problème.

Si l'on suppose d'abord qu'il y ait un gain, prenons ce gain pour inconnue. Portons, sur la droite Ox, une longueur $OA = a$, et retranchons-en la longueur $AB = b$. Alors la différence OB représentera le gain cherché.

Fig. 4.

O B A x

Si l'on suppose, au contraire, qu'il y ait eu perte, on portera, sur une ligne Ox', une longueur $OB' = b$, et l'on en soustraira $B'A' = a$. Le résultat $O'A'$ sera la perte cherchée.

Fig. 5

O A' B' x'

Le premier cas est possible, si l'on a $a > b$; le second, si l'on a $a < b$: c'est ce que supposent les deux figures.

Voyons maintenant ce que deviendrait la solution du premier cas pour $a < b$. De la ligne OA, il s'agirait de soustraire la ligne plus grande AB, ce qui est arithmétiquement impossible. Si néanmoins nous exécutons la même construction géométrique que dans le cas où la soustraction est possible, le point B se trouvera porté à gauche du point O, à une distance $OB = b - a$. Or, cette distance donne précisément la valeur de la perte qui a réellement lieu. Donc la même construction géométrique peut servir à résoudre les deux cas du problème, et la solution sera toujours représentée par la distance OB, portée à droite du point O, lorsque c'est un gain, à gauche, lorsque c'est une perte.

Fig. 6.

B A B O A x

Cette construction a, de plus, l'avantage de pouvoir faire connaître en même temps l'état de la fortune du possesseur. Supposons,

en effet, que cette fortune soit représentée par la longueur ΩO.

Fig. 7.

Ω O B x

Ω B O x

Il faudra lui ajouter la solution OB, lorsque ce sera un gain; l'en retrancher, lorsque ce sera une perte. Il faudra donc porter la solution, dans le premier cas, à droite, dans le second cas, à gauche du point O, et c'est précisément ce que donne la construction précédente.

28. On voit aisément que la construction géométrique du premier cas revient à porter l'un à la suite de l'autre, en sens opposés, les axes Ox, $O'x'$ (*fig.* 4 et 5), sur lesquels sont comptés respectivement les gains et les pertes. Le passage du gain à la perte, qui se fait par degrés continus, lorsqu'on fait croître b, par exemple, se trouvera indiqué par le passage du point B de la droite à la gauche de l'origine O, et l'on n'aura plus à se demander sur lequel des deux axes il faut porter le résultat, la construction le portant d'elle-même sur l'axe convenable.

Fig. 8.

x' O x

B O' B B A

Les deux axes n'étant plus terminés l'un et l'autre au point O, et se servant mutuellement de prolongement, le point B ne risquera plus, pour ainsi dire, de tomber dans le vide, lorsqu'on aura fait la construction du gain pour le cas de la perte, ou *vice versa*. La soustraction définie géométriquement ne sera donc plus impossible, comme pouvait l'être la soustraction arithmétique.

29. Si donc nous désignons par le signe — la soustraction géométrique, et par x le segment OB, la solution du problème sera toujours fournie par l'équation

$$x = a - b,$$

la *longueur* de OB donnant la grandeur du gain ou de la perte, et la *direction* de OB indiquant si c'est à un gain ou à une perte que s'applique cette grandeur.

Si maintenant k représente la fortune primitive, y la fortune actuelle du possesseur, on aura, s'il y a gain,

$$y = k + \mathrm{OB};$$

s'il y a perte,

$$y = k - \mathrm{OB}.$$

Dans le premier cas, on a évidemment,

$$y = k + x.$$

Voyons comment nous pourrons faire rentrer le second cas dans la même formule.

30. Nous avons défini, dans la représentation des grandeurs arithmétiques ou absolues, le point initial comme étant l'extrémité la plus rapprochée de l'origine O, le point final comme étant l'extrémité la plus éloignée de cette origine. En d'autres termes plus généraux, nous avons établi, quelle que soit la position du segment considéré, que l'on va du point initial au point final en marchant *de la gauche vers la droite.*

Considérons maintenant le segment OB, qui, suivant sa direction, représente un gain ou une perte. En se rappelant que l'axe $x'Ox$, indéfini dans les deux sens, a été formé par la juxtaposition des axes Ox, $O'x'$ (*fig. 4* et *5*), indéfinis chacun dans un seul sens, on voit que O doit être considéré comme le point initial soit du gain, soit de la perte. Donc, dans la construction généralisée, on ira du point initial au point final de la solution x, en marchant *de gauche à droite* si x représente un gain, et *de droite à gauche* si x représente une perte.

D'après ces conventions sur les noms à donner aux extrémités du segment x, on voit que, si l'on étend à tous les cas la définition que nous avons donnée (n° 23), de l'*addition géométrique,* la soustraction de la longueur OB, dans le cas où elle devra avoir lieu, sera précisément ce que nous devons appeler *addition* du segment *dirigé* x.

Donc, dans tous les cas, si l'on adopte pour l'addition et pour la soustraction leurs définitions géométriques, en ayant égard à la transposition des noms des extrémités qui correspond au changement de direction du segment, on aura, pour la solution complète du problème, les équations

$$x = a - b,$$
$$y = k + x,$$

dont la première fera connaître le gain ou la perte (celle-ci étant considérée comme un gain *négatif*), et l'autre, la fortune actuelle du possesseur.

On voit que la soustraction géométrique se fait ici en prenant la différence des valeurs absolues, et portant le résultat dans le sens affecté au plus grand terme; et que l'addition géométrique répond, suivant le sens de x, soit à une addition, soit à une soustraction arithmétique.

31. Nous pouvons encore compléter la généralisation que nous avons commencée. Dans la formule

$$y = k + x,$$

l'addition géométrique suffit pour représenter à la fois l'addition d'un gain ou la soustraction d'une perte. Si, au lieu de représenter par x un gain porté à droite ou une perte portée à gauche, nous avions représenté par x une perte portée à droite ou un gain porté à gauche, nous aurions obtenu, au lieu de la formule précédente, la formule

$$y = k - x,$$

qui aurait également répondu à tous les cas, en donnant à la soustraction géométrique la même extension que nous avons donnée à l'addition. Donc, lorsque deux quantités, se succédant l'une à l'autre d'une manière continue, sont représentées par des segments pris sur une même droite dans des sens opposés, l'addition géométrique de l'une peut être remplacée par la soustraction géométrique de l'autre, et réciproquement; de sorte que l'on passera du cas de l'une au cas de l'autre en changeant simplement le signe $+$ ou $-$ qui précédait la première, c'est-à-dire en remplaçant $+x$ par $-x$, $-x$ par $+x$.

On peut indiquer ce changement d'avance une fois pour toutes, en convenant que, si l'une des quantités est représentée par $+x$, l'autre le sera par $-x$, et établissant, pour règles des opérations algébriques, que l'addition se fera en laissant à chaque terme son signe, la soustraction en donnant à chaque terme un signe contraire.

Cette convention que nous avons faite relativement au résultat x de la première partie de la question, on peut aussi l'étendre aux données, et au lieu de représenter par a et b les grandeurs d'un gain et d'une perte, et d'indiquer explicitement par les signes $+$ et $-$ la nature de ces quantités, on peut convenir que chacune

des lettres a, b représentera soit un gain, soit une perte, et sera figurée dans le premier cas par une ligne dirigée vers la droite, dans le second par une ligne dirigée vers la gauche, les lettres a et b renfermant en elles cette notion distinctive de direction. Alors la formule

$$x = a - b$$

pourra être remplacée par la formule

$$x = a + b,$$

pareille à la formule

$$y = k + x,$$

et pouvant servir à la solution non seulement de la question actuelle, mais encore des autres questions correspondantes aux cas où a représenterait une perte ou b un gain.

32. Remarquons, enfin, que le problème dont la solution est donnée par l'équation

$$y = k + x, \qquad \text{ou} \qquad y = k + a + b$$

peut, dans certains cas, être possible ou impossible, suivant que l'on donnera ou non à la lettre y la faculté de représenter une dette aussi bien qu'un avoir. Dans le premier cas, on supposerait que la personne, ayant perdu plus qu'elle ne possède, pourrait contracter une dette, en ayant recours à son crédit. Dans le second cas, on ne considérerait que les paiements réalisables, et alors un paiement surpassant l'avoir serait considéré comme impossible.

Voilà donc encore un exemple d'un cas d'impossibilité dont les circonstances ne peuvent être exprimées par des équations.

33. On donne le nom de quantités *positives* à celles qui sont représentées par des lignes dirigées dans le sens primitivement assigné aux quantités *arithmétiques* ou *absolues* de même nom, et le nom de quantités *négatives* à celles qui sont représentées par des lignes dirigées en sens contraire.

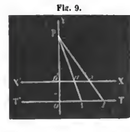
Nous désignerons provisoirement, avec Cauchy, sous le nom commun de *quantités algébriques* les quantités *dirigées*, c'est-à-dire les quantités *positives* et *négatives* représentées par des lettres comprenant implicitement le signe de direction.

§ IV.

34. Prenons pour second exemple la relation qui exprime le mouvement uniforme d'un point sur une droite.

Représentons les temps par des segments pris sur la droite OT, et les espaces par des segments pris sur la droite parallèle O'X. Soit $O'a = a$ l'espace parcouru dans le temps $O1 = 1$. Les espaces étant proportionnels aux temps, l'espace x, correspondant au temps t, sera donné par la proportion

Fig. 9.



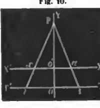
$$1 : t = a : x,$$

d'où l'on voit comment la valeur $x = at$ se construit au moyen d'une quatrième proportionnelle.

Cette construction, qui consiste à déterminer d'abord le point P où la droite $\overline{1a}$ rencontre la perpendiculaire OY, puis à joindre P au point t par une droite qui rencontre O'X à la distance $O'x = x$, servira évidemment aussi à faire connaître t lorsqu'on donnera x.

35. Si l'on considère les positions du mobile avant le temps que l'on a pris pour origine, on voit que le mobile se trouvait sur O'X', *à gauche* du point O', en x' par exemple. Si l'on applique à ce cas la construction du numéro précédent pour trouver le temps au moyen de l'espace, on obtiendra pour représentation du temps un segment Ot', de grandeur égale à $\frac{O'x'}{Oa}$, et situé à gauche de O. On est conduit, par les mêmes raisons que ci-dessus, à considérer ce temps t' comme négatif, ainsi que l'espace x'. L'équation

Fig. 10.

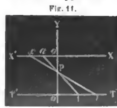


$$x' = at'$$

représentera toujours la solution, en établissant cette règle des signes, que le produit d'un nombre positif a par une quantité t', positive ou négative, est de même signe que t'.

36. Nous avons supposé jusqu'ici le mouvement s'effectuant dans la direction même que l'on a choisie pour représenter les temps positifs. Supposons maintenant le mouvement dirigé en sens contraire, et continuons à compter les segments positivement à droite, négativement à gauche. Pour $t = 1$, l'espace $O'a$ sera négatif, et la quatrième proportionnelle x aux grandeurs 1, a, t (pour t positif), devra être dirigée dans le même sens que $O'a$, et par suite devra être négative. C'est précisément ce qu'indique la construction géométrique étendue au cas où $O'a$ est porté vers la gauche. Donc la formule

Fig. 11.



$$x = at$$

subsistera pour a négatif et t positif, à la condition de donner à x le signe de a.

Enfin, si, pour a négatif, on prend aussi t négatif, l'espace $O'x$ devra être égal en grandeur au produit

Fig. 12.

$$O'a \times Ot,$$

et porté vers la droite, c'est-à-dire positif, et c'est ce que donne encore la construction.

37. On voit donc que la construction de la multiplication, définie d'abord pour les grandeurs absolues, puis étendue aux grandeurs pourvues de signes de direction, conduit à la règle des signes pour la multiplication des quantités algébriques, et, par suite, à toutes les conséquences de cette règle.

Il est évident que tout ce que nous avons dit pour la multiplication s'applique aussi à la division.

38. Il résulte de là, en passant à l'élévation aux puissances, que toute puissance paire d'une quantité soit positive, soit négative, est positive, et que toute puissance impaire d'une quantité est de même signe que cette quantité.

Si l'on considère enfin l'opération inverse de l'élévation aux puissances, c'est-à-dire l'extraction des racines, on voit qu'étant

donnée une quantité quelconque, il existera toujours une racine de degré impair quelconque de cette quantité, et que cette racine unique sera de même signe que la puissance donnée.

Étant donnée une quantité positive, on pourra toujours lui trouver deux racines d'un degré pair quelconque, égales et de signe contraire.

Mais une quantité négative ne saurait être produite par l'élévation d'aucune quantité à une puissance paire. Donc une racine de degré pair d'une quantité négative est une quantité *impossible* ou *imaginaire,* tant que l'on n'aura pas rendu l'opération de l'extraction de la racine possible dans tous les cas, par une nouvelle extension de l'idée de quantité et de la définition des opérations.

Les quantités arithmétiques et les quantités algébriques, ou, en d'autres termes, les quantités positives et les quantités négatives, sont désignées par la dénomination commune de *quantités réelles*.

CHAPITRE III.

DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES, OU QUANTITÉS COMPLEXES.

§ Ier.

Définition des quantités géométriques.

39. Nous appellerons provisoirement, d'après Cauchy, *quantité géométrique* une droite donnée *en grandeur et en direction,* cette direction n'étant plus assujettie, comme pour les quantités algébriques, à être parallèle à une droite donnée, mais étant quelconque dans le plan.

Deux quantités géométriques sont dites *égales* géométriquement lorsqu'elles ont même longueur et même direction, de sorte qu'on puisse les faire *coïncider* l'une avec l'autre, c'est-à-dire leur donner à la fois même extrémité *initiale* et même extrémité *finale*, en transportant l'une d'entre elles parallèlement à elle-même.

La longueur de la droite s'appelle le *module* de la quantité géométrique. L'angle que fait sa *direction* avec un axe fixe s'appelle son *argument.*

Deux quantités géométriques sont donc égales lorsqu'elles ont des modules égaux et des arguments soit égaux, soit différant l'un de l'autre d'un multiple quelconque de quatre angles droits. Ainsi l'égalité de deux quantités géométriques z, z' entraîne les deux égalités numériques

$$\text{mod. } z = \text{mod. } z',$$

et

$$\text{arg. } z = \text{arg. } z',$$

ou du moins

$$\text{arg. } z = \text{arg. } z' + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif.

En désignant par r le module et par p l'argument d'une quantité géométrique, nous représenterons, du moins provisoirement, la quantité géométrique par la notation

$$r_p.$$

Une quantité positive peut être regardée comme une quantité géométrique d'argument 0 ou $2k\pi$; une quantité négative, comme une quantité géométrique d'argument π ou $(2k+1)\pi$.

40. Au lieu de considérer la droite elle-même, il suffit de considérer ses deux extrémités, en ayant soin de distinguer l'extrémité *initiale*, d'où partirait un point pour décrire la droite dans la direction donnée, de l'extrémité *finale*, où ce point s'arrêterait.

Si l'extrémité initiale est fixe, et qu'on la prenne pour *origine*, la droite sera déterminée par sa seule extrémité finale, dont le module et l'argument seront les coordonnées polaires. Alors la quantité géométrique pourra être déterminée par un seul point du plan; et réciproquement, tout point du plan pourra être représenté par une quantité géométrique ayant ce point pour extrémité finale, et l'origine des coordonnées pour extrémité initiale.

§ II.

Addition et soustraction des quantités géométriques.

41. Après avoir défini l'*égalité* des quantités géométriques, définissons maintenant leur *addition*.

Nous étendrons aux quantités géométriques la définition de cette opération donnée pour les quantités arithmétiques et algébriques. Pour ajouter deux quantités géométriques, on transportera l'une d'elles parallélement à elle-même, de manière que son extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale de l'autre. La droite qui va de l'extrémité initiale de la seconde à l'extrémité finale de la première est dite la *somme* des deux quantités géométriques.

On voit, par cette construction, que la somme de deux quantités géométriques est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent ces quantités géométriques.

La somme de deux quantités géométriques ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des parties. Ainsi l'on a

Fig. 13.

$$\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{BC}},$$

en indiquant par un trait supérieur une droite prise en grandeur et en direction, et considérée comme une quantité géométrique.

A ce point de vue, on peut dire qu'un côté d'un triangle est égal à la somme *géométrique* des deux autres côtés.

De même, la résultante de deux vitesses, de deux accélérations,

de deux forces, etc., est égale à la somme *géométrique* des composantes.

42. De la définition de l'addition résulte immédiatement la définition de l'opération inverse, c'est-à-dire de la *soustraction*. Si l'on a

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB},$$

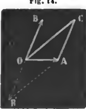
il en résultera, par définition,

$$\overline{OA} = \overline{OC} - \overline{OB}.$$

La soustraction s'effectuera donc en faisant coïncider les extrémités finales des deux termes de la différence, et prenant pour cette différence la droite qui va de l'extrémité initiale du terme positif à l'extrémité initiale du terme négatif.

43. On voit que, si l'on considère une quantité géométrique $\overline{OB'}$, égale et opposée à $\overline{OB}$, la construction qui donnera $\overline{OC} - \overline{OB}$ sera la même que celle qui donnera $\overline{OC} + \overline{OB'}$. Donc si l'on considère deux quantités géométriques *opposées*, c'est-à-dire ayant des modules égaux et des arguments différant de π (ou d'un multiple impair de π), l'addition de l'une de ces deux quantités équivaudra à la soustraction de l'autre.

Fig. 11.



Si donc nous représentons l'une de ces quantités par $+z$, nous serons conduits, comme nous l'avons été dans le cas particulier des quantités *algébriques*, à représenter l'autre par $-z$.

On a donc

$$r_{p+\pi} = -r_p,$$

et, plus généralement,

$$r_{p+(2k+1)\pi} = -r_p,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif.

44. Une quantité géométrique doit être considérée comme nulle, uel que soit son argument, lorsque son module sera nul. Il est

clair alors que l'addition ou la soustraction de cette quantité n'auront aucune influence.

La somme de deux quantités opposées, ou, ce qui revient au même, la différence de deux quantités égales est nulle.

45. La somme de plusieurs quantités géométriques est le côté qui ferme le polygone dont les autres côtés sont égaux, en grandeur et en direction, aux quantités géométriques données.

Elle est nulle lorsque le polygone se ferme de lui-même.

Il est aisé de voir que la somme d'un nombre quelconque de quantités géométriques ne dépend pas de l'ordre des parties.

Les théorèmes connus de géométrie font voir que les modules de la somme et de la différence de deux quantités sont compris l'un et l'autre entre la somme et la différence des modules de ces quantités, et que le module de la somme de plusieurs quantités est moindre que la somme des modules de ces quantités.

46. *Décomposition d'une quantité géométrique en ses composantes rectangulaires.* — Si l'on projette une quantité géométrique r_p sur un axe Ox, la projection, que nous désignerons par x, sera, d'après la convention établie pour les quantités algébriques, positive ou négative, suivant que p (ou, s'il est plus grand que deux angles droits, son complément à 4 droits, $2\pi - p$) sera aigu ou obtus.

Le rapport, positif ou négatif, de x à la longueur r est dit le *cosinus* de l'angle p. On a évidemment

$$\cos(-p) = \cos(2\pi - p) = \cos p.$$

Si l'on projette de même r_p sur un axe Oy, faisant avec la partie positive de Ox un angle droit (compté dans le sens des angles croissants), la projection y sera positive ou négative, suivant que l'angle $p - \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} - p$ (ou son complément à 2π) sera aigu ou obtus.

Le rapport, positif ou négatif,

$$\frac{y}{r} = \cos\left(p - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right)$$

est dit le *sinus* de l'angle p. On voit aisément que

$$\sin(-p) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) = -\sin p.$$

On a ainsi, par définition, pour les projections de r_p sur les deux axes rectangulaires Ox, Oy,

$$x = r\cos p,$$
$$y = r\sin p.$$

Ces deux projections sont les *coordonnées rectangulaires* du point dont r et p sont les coordonnées polaires.

47. La projection sur l'axe des x est une quantité géométrique ayant pour module la longueur absolue de la projection $r\cos p$, et pour argument 0 ou π, suivant qu'elle est positive ou négative.

La projection sur l'axe des y est une quantité géométrique ayant pour module la longueur absolue de $r\sin p$, et pour argument $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{3\pi}{2}\right)$, suivant qu'elle sera positive ou négative.

Nous pourrons considérer, pour plus de simplicité, les x négatifs comme ayant un module négatif et un argument nul, de même que les x positifs. Pour faire la somme géométrique de deux ou de plusieurs x de signes quelconques, on fera alors la somme *algébrique* des modules, et l'on donnera à cette somme l'argument zéro, de sorte que l'on aura

$$x_0 + x'_0 + x''_0 + \cdots = (x + x' + x'' + \cdots)_0.$$

De même, on considérera les y négatifs comme ayant un module négatif, et un argument $= \frac{\pi}{2}$, de même que les y positifs, et l'on aura, d'après cette convention,

$$y_{\frac{\pi}{2}} + y'_{\frac{\pi}{2}} + y''_{\frac{\pi}{2}} + \cdots = (y + y' + y'' + \cdots)_{\frac{\pi}{2}}.$$

48. Une quantité géométrique r_p peut être regardée comme la somme géométrique de ses deux projections ou *composantes* rectangulaires x ou x_0, y ou $y_{\frac{\pi}{2}}$, de sorte qu'on aura

$$r_p = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}},$$

les modules, positifs ou négatifs, x et y étant déterminés par les équations

$$x = r\cos p,$$
$$y = r\sin p.$$

d'où l'on tire

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$p = \text{arc cos}\frac{x}{r} = \text{arc sin}\frac{y}{r} = \text{arc tang}\frac{x}{y}.$$

Remarque. L'expression arc tang $\frac{y}{x}$ convient également à deux directions opposées, aussi bien à celle qui répond aux valeurs $\frac{-x}{r}$, $\frac{-y}{r}$ du cosinus et du sinus, qu'à celle qui répond aux valeurs $\frac{+x}{r}$, $\frac{+y}{r}$ de ces mêmes quantités. Pour abréger l'écriture, et pouvoir nous contenter dans tous les cas d'introduire l'expression de l'arc tangente, qui est généralement la plus simple, nous conviendrons que la notation arc tang $\frac{y}{x}$, ou, plus explicitement, arc tang $\frac{+y}{+x}$ représente l'arc dont le sinus a le *même signe* que $+y$, et le cosinus le *même signe* que $+x$. D'après cette convention, on aura

$$\text{arc tang}\frac{-y}{-x} = \text{arc tang}\frac{+y}{+x} \pm \pi.$$

49. On peut donc toujours considérer une quantité géométrique comme équivalente à la *somme* de deux composantes suivant des directions rectangulaires entre elles. C'est à ce point de vue que l'on a donné aux quantités géométriques le nom de quantités *complexes*, qui est le plus généralement adopté, et que nous emploierons le plus souvent dans ce qui va suivre.

50. L'addition de deux ou de plusieurs quantités complexes se ramène à l'addition de leurs composantes, et, d'après ce que nous avons vu, l'addition de ces composantes s'exécute sur chaque axe, d'après la règle de l'addition des quantités réelles. On a ainsi

$$r_p + r'_{p'} + r''_{p''} + \cdots = \left(x_0 + x'_0 + x''_0 + \cdots\right) + \left(y_{\frac{\pi}{2}} + y'_{\frac{\pi}{2}} + y''_{\frac{\pi}{2}} + \cdots\right)$$

$$= (x + x' + x'' + \cdots)_0 + (y + y' + y'' + \cdots)_{\frac{\pi}{2}}.$$

La somme de plusieurs quantités géométriques Σr_p est nulle, lorsque les deux conditions nécessaires et suffisantes

$$\Sigma x = \Sigma r \cos p = 0,$$
$$\Sigma y = \Sigma r \sin p = 0$$

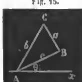
sont satisfaites.

51. Si l'on a une égalité entre deux quantités complexes, cette égalité se décomposera en deux autres égalités, l'une entre les composantes *horizontales*, l'autre entre les composantes *verticales*.

On peut profiter de cette réunion de deux égalités en une seule pour présenter les formules sous la forme la plus simple.

Soit, par exemple, un triangle rectiligne ABC. Prenons pour arc de projection une droite quelconque Ax, faisant un angle θ avec le côté AB. L'égalité géométrique

Fig. 15.



$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

pourra s'écrire

$$c_\theta = b_{\theta + A} + a_{\theta - B}.$$

En donnant à θ diverses valeurs convenables, et ayant égard à l'équation

$$A + B + C = \pi,$$

cette formule fournira successivement toutes les formules de la trigonométrie rectiligne, et elle les résume toutes de la manière la plus succincte.

52. *Des séries à termes complexes.* — De ce que nous venons d'exposer sur l'addition des quantités complexes, il résulte qu'une série dont les termes sont des quantités complexes est *convergente*, quels que soient les arguments, toutes les fois que la série des modules est convergente, pourvu que l'on définisse la convergence des séries complexes par une extension de la définition de la convergence des séries nouvelles.

Une série réelle est dite *convergente* lorsque, pour n assez grand, la somme des k termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tend vers zéro, quel que soit k, pourvu qu'il ne dépende pas de n.

De même, une série complexe sera dite *convergente*, lorsque, pour n assez grand, le module de la somme des k termes qui suivent le $n^{ième}$ tendra vers zéro, quel que soit k, indépendant de n.

Si la série des modules est convergente, en la représentant par

$$r^{(1)} + r^{(2)} + \dots + r^{(n)} + \dots,$$

alors on devra avoir

$$r^{(n+1)} + r^{(n+2)} + \dots + r^{(n+k)}$$

infiniment petit, pour n infini, quel que soit k.

Soit maintenant

$$z^{(1)} + z^{(2)} + \dots + z^{(n)} + \dots$$

la série complexe, dont les termes ont pour modules

$$r^{(1)},\quad r^{(2)},\ \dots,\quad r^{(n)},\ \dots.$$

Le module de la somme des k termes qui suivent le $n^{ième}$,

$$z^{(n+1)} + z^{(n+2)} + \dots + z^{(n+k)},$$

est moindre que la somme des modules de ces termes, laquelle tend, par hypothèse, vers zéro pour n infini, quel que soit k. Donc il en est de même *a fortiori* du module de la somme $z^{(n+1)} + \dots + z^{(n+k)}$. Donc la série complexe est convergente, quels que soient d'ailleurs les arguments de ses termes.

On voit aisément que la convergence d'une série complexe entraîne la converge des deux séries réelles qui ont pour termes les composantes horizontales et verticales des termes de la série complexe, et réciproquement.

53. Considérons une quantité complexe variable, dont l'extrémité initiale est fixe, et que l'on peut représenter par sa seule extrémité finale. Nous désignerons, dans ce cas, par la même lettre z la quantité complexe r_p elle-même et son extrémité finale.

Si le point z passe de la position z à la position z', la différence $z' - z$ représentera en grandeur et en direction la distance de ces deux positions.

Si l'on fait varier d'une manière continue la quantité complexe z, ou, ce qui revient au même, son module r et son argument p, ou encore ses deux composantes x et y, le point z se déplacera, en décrivant une certaine ligne dont la forme dépendra de la relation arbitraire que l'on établira entre les coordonnées polaires r et p, ou entre les coordonnées rectangulaires x et y. Nous appellerons cette ligne le *chemin* ou la *trajectoire* du point z.

Lorsqu'on suppose les deux positions z, z' infiniment voisines, leur distance, représentée en grandeur et en direction par la différence infiniment petite $z'-z$, sera dite la *différentielle* de la variable z, et nous la désignerons, en conséquence, par le symbole dz.

Toutes les règles de la différentiation des quantités réelles qui ne dépendent que des règles de l'addition et de la soustraction, subsistent aussi pour les quantités complexes. On aura ainsi

$$dz = d(x_0) + d(y_{\frac{\pi}{2}}) = (dx)_0 + (dy)_{\frac{\pi}{2}}.$$

54. Le module de la quantité complexe dz, que nous représenterons par ρ, a pour valeur

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dr^2+r^2dp^2}.$$

C'est l'élément infiniment petit ds de la courbe décrite par le point z.

Pour que dz soit infiniment petit, il faut et il suffit que son module ρ soit infiniment petit.

Mais l'argument de dz, c'est-à-dire l'angle

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{dy}{dx}$$

n'est assujetti à aucune condition, et peut prendre une valeur finie quelconque, dépendant de la forme du chemin de z.

55. Le chemin de z est la limite du polygone infinitésimal qui a pour côtés les accroissements dz successifs. La distance des deux positions extrêmes de z est la limite de la somme géométrique des côtés de ce polygone. Nous représenterons cette limite de somme d'éléments infiniment petits par le signe d'intégration.

Si donc le point z, partant de l'origine, arrive en Z après avoir décrit un chemin quelconque, la quantité géométrique $\overline{OZ}$, ou le point Z qui la représente, seront désignés par l'intégrale

$$(1) \qquad Z = \int_0^Z dz \ ,$$

comme dans le cas des quantités réelles.

De même la droite qui joint les deux points $z^{(0)}$ et Z de la trajectoire sera égale à l'intégrale

$$(2) \qquad Z - z^{(0)} = \int_{z^{(0)}}^{Z} dz \ .$$

Si le chemin de z est une courbe fermée, alors en revenant au point de départ on a $Z = z^{(0)}$. Donc l'intégrale $\int dz$, prise tout le long d'un *contour* fermé quelconque, est nulle.

D'après ce que nous voyons ici, les valeurs des intégrales (1) et (2) ne dépendent que des limites de l'intégration, et nullement du chemin parcouru entre ces deux limites. C'est grâce à cette indépendance que nous avons obtenu les valeurs de ces intégrales sous la même forme que dans le cas d'une variable réelle. Mais nous verrons plus tard qu'il ne faudrait pas étendre trop loin cette généralisation.

§ III.

Multiplication, division et élévation aux puissances entières des quantités géométriques.

56. La définition de la multiplication par une quantité réelle se déduit de la définition de l'addition pour les quantités complexes comme pour les quantités réelles.

La multiplication par un nombre entier m est l'addition de m quantités égales au multiplicande. Ces quantités égales ayant même argument, la multiplication se réduira à la multiplication du module, de sorte qu'on aura

$$(1) \qquad r_p \times m = (mr)_p \ .$$

De la multiplication par un nombre entier on passe, à l'aide du raisonnement connu, à la division par un nombre entier, puis à la multiplication par une fraction, et enfin, en invoquant le prin-

cipe des limites, à la multiplication par un nombre incommensurable. On en conclura, dans tous les cas, que, pour multiplier une quantité géométrique r_p par un nombre quelconque m, commensurable ou non, il suffit de multiplier le module r par ce nombre, sans changer l'argument.

On peut maintenant représenter la multiplicateur m par le rapport de deux lignes, $Om : O1$. Soit alors $\overline{Oz} = r_p$ le multiplicande.

Fig. 16.

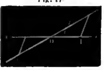


On multipliera le module Oz par m en construisant le triangle Omw semblable à $O1z$, et puisque l'argument ne doit pas changer, $\overline{Ow}$ représentera, en grandeur et en direction, le produit de z par m.

On voit que la construction revient à joindre les points 1 et z, et à mener par l'extrémité m du multiplicateur une parallèle mw à $1z$, jusqu'à la rencontre de la droite Oz.

57. Le multiplicateur arithmétique Om peut être considéré comme une quantité algébrique positive. Étendons maintenant la

Fig. 17



même construction au cas où le multiplicateur est une quantité négative. Alors le produit Ow, au lieu d'avoir la même direction que Oz, sera dirigé suivant le prolongement de Oz.

On a donc

$$(2) \qquad r_p \times (-m) = (mr)_{p+\pi} = -(mr)_p .$$

Or, la quantité algébrique $\pm m$ peut être regardée comme une quantité géométrique de module m et d'argument 0 ou π, et on peut la représenter par m_0 ou par m_π. Dès lors, les deux formules précédentes (1) et (2) deviennent

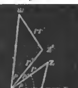
$$r_p \times m_0 = (r.m)_{p+0} ,$$
$$r_p \times m_\pi = (r.m)_{p+\pi} ,$$

et l'on peut dire que la multiplication d'une quantité complexe par une quantité algébrique s'effectue en faisant le produit des modules et l'addition des arguments des deux facteurs.

58. Supposons maintenant que l'on applique la même construction au cas où le multiplicateur réel $\pm m$ est remplacé par une

quantité géométrique quelconque $z' = r'_{p'}$. On devra construire sur Oz' un triangle $Oz'w$ semblable au triangle $O1z$. La quantité géométrique $\overline{Ow}$, ainsi obtenue, aura pour module $Ow = rr'$ et pour argument $wOx = p + p'$.

Fig. 18.



Il est clair que l'on aurait obtenu la même quantité $\overline{Ow}$, en construisant sur Oz un triangle Ozw semblable à $O1z'$.

On peut donc, dans cette opération, prendre l'une pour l'autre les deux quantités z et z'. Cette opération jouit donc de la propriété fondamentale de la multiplication. Donc il est permis de lui donner le nom de *multiplication.*

Nous définirons donc la *multiplication des quantités complexes* comme *une opération qui consiste dans la multiplication des modules et dans l'addition des arguments des facteurs;* de sorte que l'on a, par définition,

$$r_p \times r'_{p'} = (rr')_{p+p'} \cdot$$

Cette règle comprend, comme cas particulier, la multiplication de deux facteurs algébriques ou d'un facteur complexe par un facteur algébrique.

59. Si l'on considère maintenant un nombre quelconque de facteurs complexes,

$$r_p \ , \quad r'_{p'} \ , \quad r''_{p''}, \ldots\ldots ,$$

il est aisé de voir que, de la définition donnée pour le cas de deux facteurs, résultera la définition pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs, laquelle sera exprimée par la formule

$$r_p \times r'_{p'} \times r''_{p''} \times \cdots = (rr'r''\ldots)_{p+p'+p''+\ldots} ;$$

et de cette définition résulte immédiatement que le théorème sur l'interversion des facteurs d'un produit s'étend au cas où le nombre des facteurs est quelconque.

On en conclut que toutes les règles de l'algèbre relatives à la multiplication des monômes s'appliquent aux produits de quantités complexes.

Pour diviser l'une par l'autre deux quantités complexes, on

prendra le quotient des modules et la différence des arguments, de sorte que l'on aura

$$\frac{r_p}{r'_{p'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{p-p'}.$$

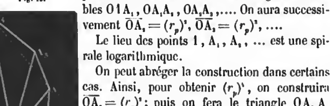
60. Pour élever une quantité complexe à une puissance entière, on élèvera le module à cette puissance, et l'on multipliera l'argument par l'exposant de la puissance. Ainsi,

$$(r_p)^m = (r^m)_{mp}.$$

Cette formule est encore vraie lorsque m est un nombre entier négatif.

On peut construire simplement la puissance m de la quantité géométrique r_p. Pour cela, soit $O1 = 1_0$, $\overline{OA_1} = r_p$. Joignons $1A_1$; puis construisons la suite des triangles semblables $O1A_1$, OA_1A_2, OA_2A_3, ... On aura successivement $\overline{OA_2} = (r_p)^2$, $\overline{OA_3} = (r_p)^3$, ...

Fig. 19.



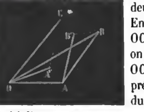
Le lieu des points 1, A_1, A_2, ... est une spirale logarithmique.

On peut abréger la construction dans certains cas. Ainsi, pour obtenir $(r_p)^4$, on construira $\overline{OA_2} = (r_p)^2$; puis on fera le triangle OA_2A_4 semblable à $O1A_2$, ce qui donnera

$$\overline{OA_4} = (\overline{OA_2})^2 = \left[(r_p)^2\right]^2 = (r_p)^4.$$

61. Soient maintenant deux quantités complexes $\overline{OA} = z$, $\overline{AB} = z'$. Pour faire les produits $\overline{OA}'$, $\overline{AB}'$ de ces deux quantités par une troisième w, on construira deux triangles semblables OAA', ABB'. En menant $A'C$ égal et parallèle à AB', OC sera la somme de ces produits. Or, on démontre facilement que le triangle OCB est semblable à chacun des deux précédents. Donc $\overline{OC}$ représente le produit de $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ par le même multiplicateur w.

Fig. 20.



On conclut de là que, si z, z' et w sont trois quantités complexes, on a

$$(z+z').w = z.w + z'.w.$$

Donc pour multiplier une somme de quantités complexes par une quantité complexe, on multipliera chaque partie de la somme par le multiplicateur.

De là découle l'extension aux quantités complexes de toutes les règles relatives à la multiplication et à la division des polynômes réels, ainsi que des formules pour les puissances entières des binômes et des polynômes.

En un mot, les règles pour la formation des fonctions rationnelles sont les mêmes pour les quantités complexes que pour les quantités réelles.

62. Considérons spécialement le cas des quantités représentées au moyen de leurs composantes rectangulaires

$$z = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}, \qquad z' = x'_0 + y'_{\frac{\pi}{2}},$$

et appliquons à la multiplication de ces quantités la règle de la multiplication des polynômes. On aura

$$\begin{aligned} zz' &= \left(x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}\right)\left(x'_0 + y'_{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= x_0 x'_0 + x_0 y'_{\frac{\pi}{2}} + y_{\frac{\pi}{2}} x'_0 + y_{\frac{\pi}{2}} y'_{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Lorsque les modules x, y, x', y', sont tous positifs, le produit devient évidemment

$$\begin{aligned} zz' &= (xx')_{0+0} + (xy')_{0+\frac{\pi}{2}} + (yx')_{\frac{\pi}{2}+0} + (yy')_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \\ &= (xx')_0 + (xy')_{\frac{\pi}{2}} + (yx')_{\frac{\pi}{2}} + (yy')_{\pi}. \end{aligned}$$

ou, à cause de $(yy')_{\pi} = -(yy')_0$,

$$zz' = (xx' - yy')_0 + (xy' + yx')_{\frac{\pi}{2}}.$$

Si un module, x par exemple, était négatif et $= -\mathrm{x}$, on aurait

$$x_0 x'_0 = \mathrm{x}_\pi x'_0 = (\mathrm{x}x')_\pi = (-xx')_\pi = (xx')_0 ,$$

et de même pour les autres cas, de sorte que le résultat précédent est tout à fait général.

63. On peut arriver au même but d'une manière plus simple, en se servant d'une notation plus commode.

On a, d'après la règle de la multiplication,

$$r_p = r_0 \times 1_p ,$$

et cette formule subsiste encore, lors même que r est un module susceptible de signe. On a donc

$$r_p \times r'_{p'} = r_0 r'_0 \times 1_p \cdot 1_{p'} = rr' \cdot 1_{p+p'} .$$

On peut donc, dans la multiplication des quantités géométriques, mettre en facteur le produit des modules, et remplacer ensuite les modules par l'unité.

D'après cette remarque, écrivons la quantité complexe $x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}$ sous la forme

$$x \cdot 1_0 + y \cdot 1_{\frac{\pi}{2}} .$$

Remarquons maintenant que 1_0 est l'unité absolue, que l'on peut se dispenser d'écrire comme facteur. Désignons ensuite par la lettre i l'*unité imaginaire* $1_{\frac{\pi}{2}}$, ou celui des rayons du cercle de rayon 1, qui est mené perpendiculairement au diamètre horizontal. La quantité complexe se présentera alors sous la forme

$$x + iy .$$

En appliquant la règle de la multiplication aux deux binômes

$$x + iy , \qquad x' + iy' ,$$

on devra remarquer que l'on a

$$i^2 = \left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1_{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = 1_\pi = -1 ,$$

et, par suite, on remplacera le carré de la quantité géométrique i par -1. La formule du numéro précédent deviendra alors

$$(1) \qquad (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx') ,$$

$xx' - yy'$ étant une quantité d'argument zéro, et le produit

$$i(xy' + yx') = (xy' + yx') \cdot 1_{\frac{\pi}{2}}$$

étant la même chose que $(xy' + yx')_{\frac{\pi}{2}}$.

D'après cela, les quantités complexes, mises sous la forme $x + iy$, pourront être traitées suivant les règles de calcul établies pour les quantités réelles, pourvu que l'on traite le symbole i comme une quantité dont le carré est -1.

Dans le binôme $x + iy$, la composante x porte le nom de *partie réelle;* la composante iy, celui de *partie imaginaire.*

Nous appliquerons toujours la dénomination d'*imaginaires pures* ou simplement d'*imaginaires* aux quantités de la forme iy, formées par la multiplication d'une quantité réelle et de l'*unité imaginaire.*

64. On déduit de là les moyens, indiqués dans les Traités d'Algèbre, pour ramener les produits, les quotients et les puissances entières de quantités complexes à la forme $u + iv$ de quantités complexes. On traitera i comme une quantité ayant pour carré

$$i^2 = -1,$$

et, par suite, pour puissances successives

$$i^3 = -i$$
$$i^4 = +1,$$
$$i^5 = +i,$$
etc....,

et en général, n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif,

$$i^{4n} = +1,$$
$$i^{4n+1} = +i,$$
$$i^{4n+2} = -1,$$
$$i^{4n+3} = -i.$$

Remarquons en particulier que l'on a

$$\frac{1}{i} = -i.$$

65. *Théorème de Moivre.* — L'équation

(2) $$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q},$$

que nous avons établie comme cas particulier de la multiplication, contient, avec l'équation (1) du n° 63, toute la théorie des fonctions circulaires.

D'après ce que nous avons vu, les fonctions $\cos p$ et $\sin p$ ne sont autre chose que les composantes rectangulaires de la quantité géométrique 1_p. On a donc

(3) $$1_p = \cos p + i \sin p.$$

En substituant cette valeur et les valeurs analogues de 1_q et de 1_{p+q} dans l'équation (2), et effectuant la multiplication d'après la règle exprimée par l'équation (1) du n° 63, il vient

$$\begin{aligned}&(\cos p \cos q - \sin p \sin q) + i(\sin p \cos q + \cos p \sin q)\\ = {}&\cos(p+q) + i \sin(p+q).\end{aligned}$$

Les deux membres sont deux quantités géométriques dont l'égalité entraîne celles de leurs composantes de même nom. On a ainsi les équations fondamentales de la trigonométrie,

$$\begin{aligned}\cos(p+q) &= \cos p \cos q - \sin p \sin q,\\ \sin(p+q) &= \sin p \cos q + \cos p \sin q,\end{aligned}$$

avec toutes leurs conséquences.

66. De l'équation (2) on tire, pour m entier quelconque,

$$(1_p)^m = 1_{mp},$$

ou, en mettant pour 1_p et pour 1_{mp} leurs valeurs tirées de la formule (3),

$$(\cos p + i \sin p)^m = \cos mp + i \sin mp.$$

On peut toujours supposer, dans cette égalité, l'exposant m positif, en donnant à p un signe convenable, ou, ce qui revient au même, en remplaçant i par $-i$. On développera alors le premier membre par la formule du binôme, et on le ramènera à la forme

$$U + iV.$$

U sera la valeur de $\cos mp$, V celle de $\sin mp$, développées suivant les puissances et les produits de $\cos p$ et de $\sin p$.

Nous n'insisterons pas ici sur les autres conséquences de la formule (2).

§ IV.

Puissances fractionnaires des quantités géométriques. — Équation binôme.

67. Considérons maintenant l'opération inverse de l'élévation aux puissances, l'extraction des racines.

La racine $m^{\text{ième}}$ de r_p est définie par l'équation

$$w^m = r_p$$

Or, si l'on prend une quantité géométrique ayant pour module $r^{\frac{1}{m}}$ et pour argument $\frac{p}{m}$, il résulte de ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, que la puissance $m^{\text{ième}}$ de cette quantité sera r_p. On aura donc

$$\sqrt[m]{r_p} = (r_p)^{\frac{1}{m}} = \left(r^{\frac{1}{m}}\right)_{\frac{p}{m}}.$$

68. Nous avons remarqué (art. 39) que si l'on donne, comme cela a lieu généralement, une quantité géométrique par sa position sur le plan ou par ses composantes rectangulaires, l'argument p n'est déterminé qu'à un multiple quelconque de 2π près, de sorte qu'on pourra toujours le représenter par

$$p + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier indéterminé, positif, nul ou négatif. Donc l'argument de $\sqrt[m]{r_p}$, ou plutôt de $\sqrt[m]{r_{p+2k\pi}}$, aura pour valeur un quelconque des angles compris dans la formule

$$\frac{p}{m} + \frac{2k\pi}{m},$$

tandis que le module de cette racine aura une valeur arithmétique $r^{\frac{1}{m}}$ parfaitement déterminée.

Les directions distinctes qui répondront aux diverses déterminations de $\sqrt[m]{r_p}$, s'obtiendront en donnant à k les m valeurs

$$0, \ 1, \ 2, \ \ldots . \ m-1.$$

Les directions qui correspondent à des valeurs de k différant entre elles d'un multiple de m, se confondront ensemble.

69. On peut représenter d'une manière très simple la multiplicité de valeurs d'une puissance fractionnaire d'une quantité géométrique.

Sur le cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine, élevons un cylindre de révolution, et traçons sur ce cylindre une hélice d'un pas quelconque, que nous pourrons supposer infiniment petit. Prenons cette hélice pour directrice d'un hélicoïde gauche, ayant pour axe l'axe du cylindre, et dont nous pourrons supposer les génératrices terminées toutes à cet axe (*).

En prenant pour unité d'arc d'hélice l'arc qui a pour projection l'unité d'arc de cercle, la spire de l'hélice ayant ainsi pour mesure le nombre 2π, nous pourrons représenter la quantité géométrique r_p par une génératrice de l'hélicoïde ayant pour longueur r, et interceptant, à partir de l'origine des arcs d'hélice (que nous supposerons coïncider avec l'origine des arcs de cercle), un arc égal à p. Si l'on imagine le pas de l'hélice infiniment petit, les diverses nappes de l'hélicoïde viendront coïncider avec le plan horizontal, qui se trouvera ainsi composé d'une infinité de nappes superposées.

Une quantité géométrique donnée par un point du plan horizontal sera représentée sur l'hélicoïde par un quelconque des points de cette surface situés sur la verticale du point donné. Les rayons vecteurs ou les modules de tous ces points seront égaux au module de la projection. Mais les arguments, mesurés par les arcs d'hélice interceptés par les rayons vecteurs à partir de l'origine commune, seront égaux à l'un quelconque d'entre eux, à celui, par exemple, qui a même valeur numérique p que l'argument de la projection, plus ou moins un nombre entier quelconque de spires de l'hélice. Ces arguments sont donc représentés par la formule

$$p + 2k\pi,$$

l'entier k pouvant prendre toutes les valeurs $\gtreqless 0$. Ainsi, les

(*) On supposerait les génératrices prolongées dans les deux sens à partir de l'axe, si l'on voulait introduire la considération des modules négatifs.

quantités géométriques de même projection r_p auront pour formule générale

$$r_{p+2k\pi}.$$

70. Si l'on élève $r_{p+2k\pi}$ à une puissance quelconque m, cette puissance aura pour expression

$$(r^m)_{mp+2km\pi},$$

et le module r^m de cette puissance sera, dans tous les cas, une quantité arithmétique déterminée.

Si l'exposant m est entier, les différentes valeurs de l'argument

$$mp + 2km\pi$$

différeront entre elles de multiples exacts de 2π. Elles correspondront donc à des directions dont les projections se confondront; de sorte que toutes les valeurs de

$$(r_{p+2k\pi})^m$$

seront des quantités géométriques égales, les points de l'hélicoïde qui les représentent étant tous situés sur une même verticale.

Lorsque, au lieu de l'entier m, on prend pour exposant une fraction $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers premiers entre eux, les restes de la division km par n seront, dans un ordre quelconque, les n nombres

$$0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1,$$

lorsqu'on donnera à k toutes les valeurs possibles. Donc les valeurs de l'argument

$$\frac{m}{n}p + 2k\frac{m}{n}\pi$$

seront de la forme

$$\frac{m}{n}p + \frac{2\mu\pi}{n} + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif, et μ un des n nombres

$$0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1.$$

En faisant abstraction du terme $2k\pi$, on voit que les valeurs de l'argument correspondent à n directions distinctes, partageant

la circonférence de base en n parties égales. Donc les points de l'hélicoïde qui représenteront les diverses valeurs de

$$\left(r_{p+2k\pi}\right)^{\frac{m}{n}}$$

se trouveront sur n verticales différentes, distribuées régulièrement sur la surface d'un cylindre de rayon $r^{\frac{m}{n}}$, et elles auront n projections distinctes, qui diviseront en n parties égales la circonférence de base de ce cylindre.

Donc, tant que l'argument p n'est connu qu'à un multiple de 2π près, la puissance fractionnaire $(r_p)^{\frac{m}{n}}$ aura n valeurs distinctes, de même module, mais d'arguments différents. En d'autres termes, l'équation

$$z^n = (a + ib)^m$$

a n racines distinctes, lorsque m et n sont premiers entre eux, et en particulier lorsque $m = 1$ (*).

(*) Si m n'est pas premier avec n, remplaçons m et n par λm, λn. L'équation deviendra

$$z^{\lambda n} = (a+ib)^{\lambda m}.$$

Si l'on met $(a+ib)^{\lambda m}$ sous la forme

$$\left(\rho^{\lambda m}\right)_{\lambda m(\varphi+2k\pi)},$$

on aura, sans ambiguïté,

$$z^n = \left(\rho^m\right)_{m(\varphi+2k\pi)},$$

m et n étant premiers entre eux. Il y aura donc n solutions.

Mais, si l'on écrivait

$$(a+ib)^{\lambda m} = \left(\rho^{\lambda m}\right)_{\lambda m\varphi+2k\pi},$$

l'argument de z serait

$$\frac{m}{n}\varphi + \frac{2k}{\lambda n}\pi,$$

le résidu de $\frac{k}{\lambda n}$ étant susceptible de λn valeurs, tandis que celui de $\frac{\lambda m k}{\lambda n}$ n'en avait que n.

On aura donc n ou λn solutions, suivant que l'on supposera donnée la valeur de $a + ib$ ou celle de $(a+ib)^{\lambda m}$

71. Examinons spécialement le cas de la racine carrée. On voit que, si $\overline{OA} = r_p$ ou $r_{p+2k\pi}$, on obtiendra la valeur de la racine carrée de $\overline{OA}$, ou la valeur de $(r^{\frac{1}{2}})_{\frac{p}{2}+k\pi}$, en construisant une moyenne proportionnelle OB entre les longueurs O1 et OA, et portant OB sur la bissectrice de l'angle AOx ou sur son prolongement OB', suivant que k sera pair ou impair.

Fig. 21.

72. Si l'on propose, en particulier, d'extraire la racine carrée d'une quantité négative

$$-r = r_{\pi+2k\pi},$$

on pourra d'abord faire abstraction du module, puisque l'on a, en général,

$$(r_p)^m = r^m . (1_p)^m,$$

et qu'ainsi il suffit, dans tous les cas, d'opérer sur 1_p, et de multiplier le résultat par la valeur arithmétique de la puissance du module.

Or, on a

$$(1_{\pi+2k\pi})^{\frac{1}{2}} = 1_{\frac{\pi}{2}+k\pi} = \pm 1_{\frac{\pi}{2}},$$

selon que k est pair ou impair, en posant donc, comme nous l'avons déjà fait (art. 63),

$$1_{\frac{\pi}{2}} = i,$$

la valeur générale de la racine carrée de $-1 = 1_{(2k+1)\pi}$ sera $\pm i$. Donc

$$\sqrt{-r} = \pm i\sqrt{r}.$$

73. Supposons enfin que l'on fasse tendre $\frac{m}{n}$ vers un nombre incommensurable α. Le module de $(r_p)^{\frac{m}{n}}$ tendra vers une limite déterminée r^α. Mais les n points du cercle, qui déterminent les n valeurs de l'argument, deviendront infiniment nombreux et infiniment rapprochés, de sorte qu'il y aura toujours une des valeurs de



l'argument qui aura pour limite un angle quelconque choisi arbitrairement.

Donc si, comme c'est le cas ordinaire, r_p n'est donné que par sa projection sur le plan, et non par sa position même sur l'hélicoïde, c'est-à-dire si l'on ne connaît l'argument de r_p qu'à un multiple de 2π près, une puissance incommensurable de r_p aura bien un module déterminé r^α, mais l'argument de cette puissance sera absolument indéterminé; de sorte que $(r_p)^\alpha$ sera représenté par un point quelconque du cercle de rayon r^α. En d'autres termes, si l'on pose

$$x + iy = (a + ib)^\alpha ,$$

x et y pourront prendre toutes les valeurs pour lesquelles on aura

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^\alpha .$$

On ne pourra donc faire usage de la fonction $(r_p)^\alpha$, pour α incommensurable, que lorsqu'on pourra se contenter de connaître les limites entre lesquelles cette quantité est renfermée, ce qui arrivera, par exemple, si r est infiniment petit.

§ V.

Des équations algébriques.

74. D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, une équation binôme, qui, en quantités réelles, pouvait avoir au plus deux racines, quelquefois une seule ou même aucune, aura maintenant dans tous les cas, par l'introduction des quantités géométriques et la généralisation des opérations, autant de racines distinctes qu'il y a d'unités dans son degré, quel que soit ce degré.

On peut conclure de là que toute équation algébrique résoluble par radicaux, c'est-à-dire pouvant se ramener à la résolution des équations binômes, sera toujours susceptible d'une solution en quantités complexes, d'où l'on conclut, par le raisonnement connu, qu'elle admettra toujours un nombre de racines égal à son degré. Tel est, en particulier, le cas des équations des quatre premiers degrés.

Mais cette propriété s'étend aussi à toute équation algébrique d'un degré quelconque. On sait que, pour le démontrer, il suffit de faire voir que toute équation algébrique, à coefficients réels ou

complexes, admet au moins une racine complexe, de la forme r^p ou $x+iy$. Nous allons reproduire ici la démonstration de ce théorème donnée par Legendre, en la présentant à peu près sous la même forme qu'Argand (art. 12).

75. Soit

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$$

un polynôme entier et rationnel de degré m, dont les coefficients a_0, a_1, ..., a_m sont des quantités quelconques, réelles ou complexes. Pour chaque valeur de la variable

$$z = r_p = x + iy,$$

on pourra construire les divers termes du polynôme; en les ajoutant, on obtiendra un polygone, généralement ouvert, et le côté R_p qui fermera ce polygone, sera la valeur du polynôme $f(z)$.

Nous allons démontrer que, pour une valeur de z convenablement choisie, le polygone se ferme de lui-même, et que l'on a alors $R = 0$ ou $f(z) = 0$.

Remarquons d'abord que, pour une valeur infiniment grande du module de z, le module du premier terme $a_0 z^m$, c'est-à-dire $r^m \times \text{mod}.a_0$, finira par surpasser autant que l'on voudra le module de la somme des autres termes, et, par suite, l'extrémité finale du polygone s'éloignera autant que l'on voudra de l'origine.

Il est évident, d'un autre côté, que, parmi les positions, en nombre infini, que peut prendre z dans toute l'étendue du plan, il y en a une qui donne pour le module R de $f(z)$ une valeur minimum, et, d'après la remarque précédente, ce module minimum ne peut correspondre qu'à une valeur finie du module de z. Il faut prouver maintenant que cette valeur minimum de R ne peut être autre que zéro.

76. Soit, s'il est possible, $w = R_p$ la valeur de $f(z)$, de module minimum, ce module étant différent de zéro, et soit z la valeur correspondante de la variable. Donnons à z un accroissement infiniment petit

Fig. 22.

$$dz = \rho_\varphi,$$

et voyons quelle sera la forme de l'accroissement correspondant du polynôme $f(z)$

Le terme $a_0 z^m$ devient

$$a_0(z+dz)^m = a_0\left(z^m + mz^{m-1}dz + \varkappa dz^2\right),$$

$\varkappa$ désignant, abstraction faite de sa valeur numérique, une quantité qui ne devient pas infinie pour $dz = 0$. L'accroissement du terme en question sera donc

$$d.a_0 z^m = m a_0 z^{m-1} dz + \varkappa dz^2 .$$

En calculant de même les accroissements des autres termes, et faisant la somme, on obtiendra, pour l'accroissement de $f(z)$, une expression de la forme

$$\left[m a_0 z^{m-1} + (m-1)\, a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\right] dz + \varkappa dz^2 ,$$

où le coefficient de dz n'est autre chose que la dérivée de $f(z)$. Donc

$$d.f(z) = f'(z)\, dz + \varkappa dz^2 .$$

Supposons d'abord que $f'(z)$ ne soit pas nul, et soit

$$f'(z) = \mathrm{R}'_{\mathrm{P}'} .$$

La valeur de $d.f(z)$ pourra s'écrire

$$d.f(z) = (\mathrm{R}'\rho)_{\mathrm{P}'+\varphi} + \varkappa(\rho^2)_{2\varphi} ,$$

expression qui, pour ρ infiniment petit, *différera infiniment peu* de son premier terme. Donc, en supposant que l'on fasse décrire au point $z + dz$ un cercle de rayon infiniment petit ρ autour du point z, le module de $df(z)$ différera infiniment peu de $\mathrm{R}'\rho$, et son argument différera infiniment peu de $\mathrm{P}' + \varphi$. Donc le point $w' = f(z + dz)$ décrira autour de w une courbe infiniment peu différente d'un cercle, et dont le rayon vecteur fera, avec le rayon vecteur du cercle décrit autour de z, un angle presque constant et infiniment peu différent de P'.

Lors donc que l'on fera parcourir à $z + dz$ le cercle complet autour de z, la fonction $f(z + dz)$ devant, au bout de cette révolution, reprendre sa valeur primitive, décrira complètement la courbe fermée autour de w, et rencontrera par conséquent le rayon vecteur $\mathrm{O}w$ quelque part entre O et w, si l'on a pris ρ assez petit pour avoir $\mathrm{R}'\rho < \mathrm{R}$, ce qui est toujours possible, tant que R n'est pas nul. Mais alors, pour la valeur de φ qui répond à cette

rencontre, le module de $f(z+dz)$ est moindre que celui de $f(z)$. Donc le module de $f(z)$ n'était pas un minimum, comme on l'avait d'abord supposé.

Nous avons admis, dans cette démonstration, que $f'(z)$ n'était pas nul. Si l'on avait $f'(z) = 0$, on pousserait le développement plus loin, et, en désignant par

$$\frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n} = R'_{p'}$$

le coefficient de la puissance la moins élevée de dz qui ne disparaisse pas, on aurait

$$d f(z) = \frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n}dz^n + \varkappa dz^{n+1} = (R'\rho^n)_{p'+n\varphi} + \varkappa(\rho^{n+1})_{(n+1)\varphi},$$

expression qui diffère infiniment peu de son premier terme. On verrait de même que si $z + dz$ fait le tour de z sur un cercle infiniment petit, ou seulement la $n^{\text{ième}}$ partie de ce tour, $f(z+dz)$ fera le tour complet de w, et l'on en conclura de la même manière que le module de $f(z)$ ne peut pas être un minimum, s'il est différent de zéro.

Donc puisque ce minimum existe, et qu'il ne peut pas être différent de zéro, il est nécessairement égal à zéro. Donc l'équation

$$f(z) = 0$$

a au moins une racine de la forme r_p ou $x+iy$, d'où l'on conclut ensuite qu'elle en a non-seulement une, mais m, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans son degré.

Ce théorème démontré, on peut établir alors d'une manière générale toutes les propriétés fondamentales des équations algébriques.

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES D'UNE VARIABLE COMPLEXE, ET DE LEURS FONCTIONS INVERSES.

§ Ier.

Des exponentielles à exposant complexe.

77. De l'équation

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q}$$

il résulte que la fonction 1_p jouit de la propriété générale exprimée par l'équation fonctionnelle

(1) $$\varphi(p).\varphi(q) = \varphi(p+q),$$

laquelle caractérise, comme on sait, les exponentielles réelles. On est donc conduit à rapprocher la fonction 1_p des exponentielles.

Or, si l'on développe en série l'expression

$$1_p = \cos p + i \sin p,$$

il vient

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1} - \frac{p^2}{2!} - \frac{ip^3}{3!} + \frac{p^4}{4!} + \dots,$$

ce que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1} + \frac{(ip)^2}{2!} + \frac{(ip)^3}{3!} + \frac{(ip)^4}{4!} + \dots.$$

Le second membre de cette égalité n'est autre chose que ce que devient le développement de l'exponentielle

(2) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

lorsqu'on y remplace x par ip.

Si donc on prend cette série, qui est toujours convergente, pour définition de l'exponentielle e^x, la même définition, appliquée au cas où l'on remplace x par ip, donnera pour résultat 1_p. Il sera donc naturel de désigner cette quantité 1_p par le symbole e^{ip}, de sorte que l'extension de la définition de l'exponentielle par la série, pour le cas de l'exposant imaginaire, s'obtiendra en posant

$$e^{ip} = 1_p.$$

Cette exponentielle imaginaire ainsi définie satisfaisant, comme l'exponentielle réelle, à l'équation caractéristique (1), sur laquelle est fondé tout le calcul des exponentielles, il s'ensuit de là que le calcul des exponentielles imaginaires se fera par les mêmes règles que celui des exponentielles réelles.

Remarquons en particulier les équations suivantes, qui résultent de cette définition :

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = +1,$$

k étant un nombre entier quelconque; et de même

$$e^{\pi i} = e^{(2k+1)\pi i} = -1,$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i} = +i,$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i} = -i.$$

78. Si, dans l'équation de définition (2), on remplace x successivement par deux quantités quelconques u et v, on prouve réciproquement, par des identités algébriques, qu'il résulte de cette définition l'égalité

$$e^u . e^v = e^{u+v},$$

c'est-à-dire que toutes les fois que l'on prend l'équation (2) pour définition de l'exponentielle à exposant quelconque, réel, imaginaire ou complexe, cette exponentielle satisfait toujours à l'équation fonctionnelle (1).

Donc les règles du calcul des exponentielles, définies par l'équation (2), subsisteront, quelle que soit la nature de l'exposant, et l'on aura, pour des valeurs quelconques de u et de v,

$$e^u . e^v = e^{u+v},$$

$$\frac{e^u}{e^v} = e^{u-v},$$

$$(e^u)^m = e^{mu},$$

m étant une quantité réelle quelconque.

Si l'on remplace m par une quantité complexe quelconque v, nous prendrons pour définition de la puissance $(e^u)^v$ l'équation

$$(e^u)^v = e^{uv} = (e^v)^u,$$

qui est une extension de la formule établie pour les exposants réels.

79. Nous pouvons maintenant remplacer la notation provisoire, que nous avions employée jusqu'ici pour représenter les quantités géométriques, par une notation plus commode et plus expressive. On a, d'après ce qu'on vient de voir,

$$r_p = r \cdot 1_p = re^{ip}.$$

C'est sous cette dernière forme que nous représenterons désormais les quantités géométriques dont la multiplication et l'élévation aux puissances rentreront dès lors complètement dans les règles générales de l'algèbre des quantités réelles.

80. Étudions maintenant les propriétés de la fonction exponentielle e^z, dont l'exposant z est une quantité complexe, de la forme $x + iy$.

On a (art. 78)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

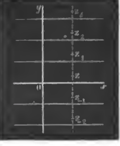
d'où l'on voit que cette expression se présente elle-même sous la forme complexe, e^x étant le module, et y l'argument.

On a, de plus (art. 77),

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

Donc l'exponentielle e^z ne change pas de valeur, lorsqu'on augmente la variable z d'un multiple quelconque de la quantité imaginaire $2\pi i$; de sorte que, si l'on fait varier z de manière à le faire croître de $2\pi i$ ou d'un multiple de $2\pi i$, la fonction e^z reprendra sa valeur primitive. On dit pour cette raison que e^z est une fonction *périodique* de z, dont l'*indice de périodicité* ou la *période* est $2\pi i$.

Fig. 23.



Représentons géométriquement cette périodicité. Soit $z = x + iy$ un point du plan, y étant d'abord supposé positif et moindre que 2π. Si l'on mène par ce point une parallèle à l'axe des y, et que, de part et d'autre de z, on porte sur cette parallèle, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, on obtiendra une suite indéfinie de points

$$\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z, z_1, z_2, \ldots,$$

pour lesquels la fonction e^z aura la même valeur.

Réciproquement, il est aisé de voir que ces points sont les seuls pour lesquels e^z ait la valeur considérée.

Si, de part et d'autre de l'origine O, on porte de même sur l'axe des y, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, et que, par les points de division, on mène des parallèles à Ox, ces parallèles partageront le plan en bandes horizontales, de hauteur 2π, et de longueur infinie dans les deux sens, et dont chacune comprendra évidemment un des points

$$\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z, z_1, z_2, \ldots,$$

et un seul. Ces points seront placés de la même manière dans leurs bandes respectives, de sorte que deux de ces points viendront coïncider l'un avec l'autre, si l'on fait glisser l'une des bandes le long de l'axe des y, jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur l'autre.

Il résulte de là que, dans chacune de ces bandes, la fonction e^z parcourt la serie complète de ses valeurs, et qu'elle y prend chaque valeur une seule fois.

Si l'on fait décrire à z une courbe quelconque dans une des bandes, ce qui donnera une certaine série de valeurs de e^z, on obtiendra la même série de valeurs en faisant décrire à z une courbe égale située de la même manière par rapport à une autre bande quelconque.

81. On verrait absolument de la même manière que la fonction

$$e^{iz}$$

est également périodique, sa période étant la quantité réelle 2π.

On représenterait géométriquement la périodicité comme nous venons de le faire, avec cette seule différence, que les bandes, au lieu d'être parallèles à l'axe des x, seraient parallèles à l'axe des y.

§ II.

Des fonctions circulaires.

82. Des équations

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p,$$
$$e^{-ip} = \cos p - i \sin p,$$

on tire

$$\cos p = \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2},$$

$$\sin p = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i}.$$

Nous prendrons ces équations, établies pour le cas de p réel, pour définitions des fonctions *cosinus* et *sinus*, dans le cas où l'on remplacera p par une variable complexe z. Nous poserons ainsi, quel que soit z

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si l'on remplace z par $x + iy$, ces valeurs deviendront

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{Ch} y - i \sin x \operatorname{Sh} y,$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y,$$

$\operatorname{Ch} y$ et $\operatorname{Sh} y$ représentant les *fonctions hyperboliques*

$$\operatorname{Ch} y = \cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2},$$

$$\operatorname{Sh} y = \frac{1}{i} \sin iy = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}.$$

Ainsi $\cos z$ et $\sin z$ se ramènent à la forme complexe, lorsque z est une quantité complexe.

83. Les exponentielles e^{iz}, e^{-iz} dont les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont formées par addition et soustraction, ayant l'une et l'autre pour période 2π, ces fonctions elles-mêmes auront aussi pour période 2π, de sorte que l'on aura, k étant un entier quelconque,

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z,$$

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z.$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur 2π, les deux fonctions $\cos z$ et $\sin z$ prendront, dans chacune de ces bandes, la totalité de leurs valeurs.

Mais on ne pourra plus dire, comme pour l'exponentielle, que

ces fonctions ne prennent la même valeur qu'une seule fois dans chaque bande. Considérons, en effet, la fonction

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Il est clair qu'elle ne change pas de valeur lorsqu'on remplace z par $-z$. On a donc

$$\cos(-z) = \cos z,$$

et, plus généralement,

$$\cos(-z + 2k\pi) = \cos(z + 2k'\pi),$$

quels que soient les entiers k et k'. De là résulte que $\cos z$ reprend la même valeur non-seulement pour les points

$$\ldots, z_{-1}, z, z_1, \ldots$$

Fig. 21.

situés dans chaque bande sur une même parellèle à Ox, mais encore pour les points

$$\ldots, z'_1, z', z'_{-1}, \ldots$$

disposés symétriquement aux premiers par rapport à l'origine O, et formant une seconde série de points équidistants, rangés sur une autre parallèle à Ox.

Donc la fonction $\cos z$ passe, dans chaque bande, deux fois par la même valeur, et il est aisé de voir que les deux points d'une même bande auxquels répondent deux valeurs égales sont placés symétriquement par rapport aux points

$$\ldots, \pi_{-1}, \pi, \pi_1, \ldots,$$

qui occupent sur l'axe des x le milieu de chaque bande.

Si donc on fait décrire à z une courbe quelconque, la série des valeurs de $\cos z$ correspondante aux divers points de cette courbe se reproduira non-seulement pour les courbes égales, disposées de la même manière par rapport aux autres bandes, mais encore pour les courbes symétriques de celles-là par rapport aux points π, *centres* de ces bandes.

84. On pourrait discuter de même directement la fonction $\sin z$.

Mais on peut aussi ramener immédiatement sa discussion à celle de $\cos z$. En effet, on a

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i^{\frac{\pi}{2}}} = e^{-\frac{\pi i}{2}},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})} - e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})} + e^{i\pi}.e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(z-\frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \cos(z-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-z).\end{aligned}$$

On aura donc, non-seulement

$$\sin z = \cos(z-\frac{\pi}{2}+2k\pi) = \sin(z+2k\pi),$$

mais encore

$$\sin z = \cos(-z+\frac{\pi}{2}) = \sin\left[\frac{\pi}{2}-(z-\frac{\pi}{2})\right] = \sin(\pi - z),$$

d'où l'on conclura que la fonction $\sin z$ prend, dans chaque bande, la totalité de ses valeurs, et chaque valeur deux fois dans la même bande.

85. La fonction

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

pouvant se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1},$$

est liée à e^{2iz} par une équation du premier degré, et aura la même période que cette exponentielle, c'est-à-dire la période π, de sorte qu'on aura, quel que soit l'entier k,

$$\operatorname{tang}(z+k\pi) = \operatorname{tang} z.$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur π, tang z prendra dans chaque bande la totalité de ses valeurs, et chaque valeur une seule fois.

86. Ce que nous venons de dire des fonctions circulaires, s'appliquerait aux fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned} \mathrm{Ch}\, z &= \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \mathrm{Sh}\, z &= \frac{1}{i}\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \mathrm{Th}\, z &= \frac{1}{i}\operatorname{tang} iz = \frac{\mathrm{Sh}\, z}{\mathrm{Ch}\, z}, \end{aligned}$$

au seul changement près des bandes verticales en bandes horizontales, et de l'indice de périodicité 2π en $2\pi i$.

§ III.

Des logarithmes.

87. Nous avons vu que la fonction e^z, dans chacune des bandes horizontales de largeur 2π dans lesquelles on divise le plan, prend la série complète de ses valeurs, et prend chaque valeur une seule fois.

Réciproquement, étant donnée *a priori* une valeur quelconque de la fonction e^z, il est facile de voir que l'on pourra toujours assigner à z une valeur qui fasse prendre à e^z la valeur donnée, et de cette valeur de z on en déduira une infinité d'autres, situées chacune dans chaque bande de largeur 2π.

Posons, en effet,

(1) $$e^z = w = u + iv,$$

$w = u + iv$ étant la valeur donnée, et cherchons à déterminer pour z une valeur de la forme $x + iy$. En identifiant

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

avec $u + iv$, il vient

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= u, \\ e^x \sin y &= v, \end{aligned}$$

d'où (art. 48, *remarque*)

$$x = \log \sqrt{u^2 + v^2},$$

$$y = \text{arc tang} \frac{v}{u}.$$

Si l'on observe que les arcs qui ont pour tangente $\frac{v}{u}$, et dont le sinus et le cosinus ont respectivement les signes de v et de u, ont une infinité de valeurs, différant entre elles par un multiple quelconque de 2π, et que l'on représente par arc tang $\frac{v}{u}$ l'une d'entre elles, la plus petite valeur positive, par exemple, la valeur générale de y sera alors

$$y = \text{arc tang} \frac{v}{u} + 2k\pi.$$

En appelant donc *logarithme* de $w = u + iv$ la fonction z inverse de l'exponentielle, et définie par l'équation (1), on aura

$$(2) \qquad \log(u + iv) = \log \sqrt{u^2 + v^2} + i \text{ arc tang} \frac{v}{u} + 2k\pi i,$$

les fonctions logarithme et arc tangente du second membre étant prises dans leur sens arithmétique et restreint, tandis que la fonction logarithme du premier membre est prise dans le sens le plus général, au point de vue des quantités complexes.

Lorsqu'il est utile de distinguer par la notation le sens généralisé des fonctions de quantités complexes, on le fait, en les entourant, à l'exemple de Cauchy, de doubles parenthèses, et en écrivant le premier membre de l'équation précédente sous la forme

$$\log((u + iv)).$$

88. Si la valeur de l'exponentielle e^z était donnée sous la forme r_p ou re^{ip}, on aurait de même

$$(3) \qquad \log(re^{ip}) = \log r + ip + 2k\pi i,$$

d'où l'on pourrait déduire immédiatement la formule (2).

En particulier, si w est une quantité réelle et positive, alors $p = 0$, $r_p = r$, et l'on a

$$\log((r)) = \log r + 2k\pi i.$$

Ainsi, parmi les valeurs en nombre infini de $\log((r))$, une seule est réelle : c'est la valeur arithmétique.

Si w est une quantité négative, $p = \pi$, d'où

$$\log((-r)) = \log r + (2k+1)\pi i .$$

89. D'après cela, les valeurs représentées par les formules (2) ou (3) ont toutes même partie réelle, et sont disposées dans chaque bande sur une même parallèle à l'axe des y, comme les diverses valeurs de z dans la *fig. 23* (p. 52).

On voit que la fonction inverse d'une fonction périodique est une fonction *multiforme*, susceptible, pour chaque valeur de la variable, d'une infinité de déterminations, qui diffèrent entre elles par des multiples d'un même intervalle constant.

§ IV.

Fonctions circulaires inverses.

90. Considérons d'abord la fonction inverse du cosinus, c'est-à-dire la valeur de $z = \operatorname{arc}\cos w$, déterminée par la formule

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = u + iv = w .$$

On tire de cette équation

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 ,$$

d'où

$$e^{iz} = w + \sqrt{(w+1)(w-1)} ,$$

$$z = \frac{1}{i} \log\left[w + \sqrt{(w+1)(w-1)}\right] .$$

Si l'on pose

$$w + 1 = \rho' e^{i\varphi'} , \quad w - 1 = \rho'' e^{i\varphi''} ,$$

$$\sqrt{\rho'\rho''} = \rho , \quad \frac{\varphi' + \varphi''}{2} = \varphi ,$$

d'où

$$\sqrt{w^2 - 1} = \rho e^{i\varphi} = s + it ,$$

la valeur de z prendra la forme

$$z = \frac{1}{i} \log\left[u + s + i(v + t)\right] ,$$

et nous avons vu comment cette valeur peut se ramener à la forme complexe.



Remarquons d'abord que, les angles φ', φ'' pouvant être remplacés par $\varphi'+2k'\pi$, $\varphi''+2k''\pi$, φ pourra l'être par

$$\varphi+(k'+k'')\pi, \quad \text{ou simplement} \quad \varphi+k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. On a ainsi, pour le radical

$$\sqrt{w^2-1}=\rho e^{i(\varphi+k\pi)},$$

deux valeurs égales et de signe contraire, suivant que k est pair ou impair. Donc z est susceptible de deux séries de valeurs, que l'on peut représenter par

$$z'=\frac{1}{i}\log((w+\sqrt{w^2-1})),$$

$$z''=\frac{1}{i}\log((w-\sqrt{w^2-1})).$$

Les deux quantités $w+\sqrt{w^2-1}$, $w-\sqrt{w^2-1}$ ayant pour produit l'unité, leurs logarithmes seront égaux et de signes contraires, et il en sera de même pour les valeurs z', z''.

Donc enfin la valeur générale de $z=\arccos((u+iv))$ pourra se mettre sous la forme (art. 48, *rem.*)

$$\begin{aligned}&\arccos((u+iv))\\ &=\pm\left\{\operatorname{arc\,tang}\frac{v+t}{u+s}+\frac{1}{i}\log\sqrt{(u+s)^2+(v+t)^2}\right\}+2k\pi,\end{aligned}$$

en posant

$$\rho=\sqrt[4]{[(u+1)^2+v^2][(u-1)^2+v^2]},$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2uv}{u^2-v^2-1},$$

$$s+it=\rho e^{i\varphi}.$$

On voit que les différentes valeurs de z sont distribuées sur le plan, comme l'indique la *fig. 24* (p. 55).

On obtiendrait de même la valeur de

$$\arcsin w=\frac{\pi}{2}-\arccos w.$$

91. Passons maintenant à la fonction inverse de la tangente,

$$z=\operatorname{arc\,tang} w,$$

déterminée par la formule

$$w = \operatorname{tang} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\,.$$

On a, d'après cette équation de définition,

$$e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw}\,,$$

$$z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw}\,.$$

En faisant $w = re^{ip}$, on a, d'après le paragraphe précédent,

$$z = \operatorname{arc\,tang}(re^{ip}) = \frac{1}{2i}\left[\log(1+ire^{ip})-\log(1-ire^{ip})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2r\cos p}{1-r^2}+\frac{i}{4}\log\frac{1+2r\sin p+r^2}{1-2r\sin p+r^2}+k\pi\,,$$

ou, sous une autre forme,

$$\operatorname{arc\,tang}(u+iv)$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2u}{1-u^2-v^2}+\frac{i}{4}\log\frac{(1+v)^2+u^2}{(1-v)^2+u^2}+k\pi\,.$$

§ V.

Exponentielles et logarithmes à base complexe.

92. Jusqu'ici nous n'avons considéré que les exponentielles relatives à la base e, à laquelle se ramènent immédiatement les exponentielles relatives à une base réelle et positive quelconque a, puisque l'on a

$$a^z = e^{z\log a}\,,$$

$\log a$ désignant le logarithme arithmétique du nombre positif a.

Voyons ce que donnent les règles de calcul établies jusqu'ici, lorsqu'on les applique au cas où a est remplacé par un nombre complexe de la forme $a+ib$, que nous pouvons toujours ramener (§ III) à la forme

$$e^{\lambda+i\mu}.$$

On a alors

$$(a+ib)^z = \left(e^{\lambda+i\mu}\right)^{x+iy} = e^{\lambda x-\mu y+i(\mu x+\lambda y)}\,.$$

quantité qui se ramène encore à la forme complexe.

Si la base est donnée sous la forme $a + ib$, son argument μ n'étant connu qu'à un multiple de 2π près, la valeur générale de l'exponentielle sera en réalité

$$e^{\lambda x-(\mu+2k\pi)y} \cdot e^{i\left[(\mu+2k\pi)x+\lambda y\right]}.$$

Ici le module, comme l'argument, dépend de k, et l'un et l'autre sont susceptibles d'une infinité de valeurs, correspondantes à la fois à des distances et à des directions différentes.

Pour $y = 0$, l'exposant étant réel, le module de l'exponentielle est déterminé; l'argument seul a une infinité de valeurs, tant que x n'a pas une valeur rationnelle. Dans ce cas l'exponentielle, comme nous l'avons déjà vu dans l'article 73, sera représentée par un point quelconque d'un cercle de rayon $e^{\lambda x}$.

Pour $x = 0$, l'exposant étant imaginaire, l'argument sera déterminé; mais le module aura une infinité de valeurs en progression arithmétique, correspondante à des points en ligne droite.

Dans le cas général, on voit, en faisant varier k, que, pour des arguments croissant en progression arithmétique, on a des modules ou rayons vecteurs croissant en progression géométrique. Donc tous les points obtenus en donnant à k différentes valeurs sont situés sur une même spirale logarithmique, et les rayons vecteurs de deux points consécutifs font entre eux un angle constant (*).

On a donc ici affaire à une fonction multiforme, comme les logarithmes ou les arcs de cercle. Comme les points qui représentent les diverses valeurs sont séparés les uns des autres par des intervalles finis (sauf pour les valeurs infinies de k pour lesquelles ces points tendent vers l'origine, point asymptotique de la spirale), on pourra les séparer les uns des autres de manière à choisir celui qui convient à la question. Donc la fonction

$$(a+ib)^{x+iy},$$

dans le cas où y n'est pas nul, remplit les conditions nécessaires pour être admise en analyse.

93. Nous supposons ici l'exposant $x + iy$ complètement déterminé. Si l'on se contentait, comme on peut le faire dans le cas

(*) J. Warren, *On the geometrical representation of the powers*, etc., art. 42 et 50. (*Philos. Transact.*, 1829.)

d'une base réelle et positive, de donner l'exposant à un multiple de $2\pi i$ près, l'exponentielle deviendrait alors, en remplaçant y par $y + 2h\pi$,

$$e^{\lambda x - (\mu + 2k\pi)(y + 2h\pi)} \cdot e^{i[(\mu + 2k\pi)x + \lambda(y + h\pi)]}$$

Les points qui représentent les valeurs de cette fonction sont alors distribués sur une infinité de spirales logarithmiques. Mais pour des distances de l'origine, finies et différentes de zéro, les points seraient encore séparés par des intervalles finis, et la fonction admissible.

94. Pour que la fonction

$$(a + ib)^z = e^{(\lambda + i\mu)z}$$

reprenne la même valeur, lorsqu'on changera z en $z + g$, il faut et il suffit que l'exposant de e croisse d'un multiple de $2\pi i$, c'est-à-dire que l'on ait, n étant entier

$$(\lambda + i\mu)g = 2n\pi i,$$

$$g = \frac{2n\pi i}{\lambda + i\mu} = \frac{2n\pi(\mu + i\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Donc la fonction $(a + ib)^z$ est périodique comme dans le cas d'une base réelle, et sa période est la quantité complexe

$$\frac{2\pi(\mu + i\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Mais il faut remarquer que μ étant susceptible d'une infinité de valeurs de la forme $\mu + 2k\pi$, la période n'est plus la même en passant d'une valeur à l'autre. Elle tend vers zéro pour $k = \pm\infty$. C'est ce qu'éclaircira encore l'article suivant.

95. Proposons-nous maintenant le problème inverse : trouver la fonction

$$z = \log w,$$

déterminée par l'équation

$$(a + ib)^z = w = u + iv,$$

ou, en exprimant $a + ib$ et $u + iv$ au moyen de leurs logarithmes,

$$e^{(\lambda + i\mu + 2ik\pi)(x + iy)} = e^{s + it + 2ih\pi}.$$

On en conclut, en identifiant les exposants,

(1) $$\lambda x - (\mu + 2k\pi)y = s\,,$$

(2) $$(\mu + 2k\pi)x + \lambda y = t + 2h\pi\,.$$

En éliminant k entre ces deux équations, on en tire

(3) $$\lambda(x^2 + y^2) - sx - (t + 2h\pi)y = 0\,.$$

Les points satisfaisant à la question sont situés à l'intersection des droites représentées par l'équation (1) avec les cercles représentés par l'équation (3). Toutes les droites (1), ainsi que tous les cercles (3), rencontrent l'axe des x au point A, dont l'abscisse est $x = \frac{s}{\lambda}$, et tous les cercles passent par l'origine.

Les droites (1) rencontrent une parallèle aux x en une série de points équidistants. Les centres des cercles (3) forment une autre série de points équidistants.

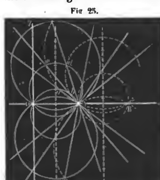
Pour $k = \pm\infty$, les points situés sur chaque cercle (3) convergent vers le point O.

Si l'on cherche le lieu des points pour lesquels la différence $h - k = g$ des indices est constante, on trouve, en éliminant k entre les équations (1) et (2), après y avoir remplacé h par $k + g$,

$$\lambda(x^2 + y^2) - (s + \lambda)x - (t - \mu + 2g\pi)y + s = 0\,,$$

équation d'une série de cercles passant au point A et au point de l'axe des x dont l'abscisse $= 1$, les centres étant distribués à intervalles égaux sur la droite $x = \frac{1}{2}\mathrm{OA} + \frac{1}{2}$.

Fig 25.



Les deux systèmes de cercles dont les intersections déterminent les points z, partagent le plan en quadrilatères curvilignes tels que $abdc$, dont les points z forment les sommets.

Il est aisé de voir que, sur chaque droite (1), pour k constant, les points z sont distribués à des distances égales, ce qui correspond à la période de la fonction $(a + ib)^z$ dont il a été question dans l'article précédent. Cet intervalle change d'une droite à l'autre.